

PRZEWODNIK DLA NAUCZYCIELI SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

Matematyka

Matura

2015

Najważniejsze zmiany

Jak zmieni się egzamin
maturalny od 2015 roku?

Nowe treści
na egzaminie maturalnym

Ocenianie holistyczne
zadań otwartych

Struktura nowego
arkusza maturalnego

B&W/MIS MEDIA/LAMY/DECO

MATURA 2015 – najważniejsze zasady

- ☒ Egzamin maturalny obejmuje przedmioty obowiązkowe oraz przedmioty dodatkowe i składa się z dwóch części: pisemnej oraz ustnej.

PRZEDMIOTY OBOWIĄZKOWE	
CZĘŚĆ PISEMNA	CZĘŚĆ USTNA
język polski (poziom podstawowy) język obcy nowożytny (poziom podstawowy) matematyka (poziom podstawowy) język mniejszości narodowej (poziom podstawowy)	język polski (bez określania poziomu) język obcy nowożytny: angielski, francuski, hiszpański, niemiecki, rosyjski i włoski (bez określania poziomu) język mniejszości narodowej (bez określania poziomu)
PRZEDMIOTY DODATKOWE	
CZĘŚĆ PISEMNA	CZĘŚĆ USTNA
Każdy uczeń musi przystąpić do egzaminu z jednego przedmiotu dodatkowego. Każdy uczeń ma prawo przystąpić do egzaminu łącznie z sześciu przedmiotów dodatkowych. Przedmioty dodatkowe uczeń zdaje na poziomie rozszerzonym (lub dwujęzycznym w wypadku języka nowożytnego).	Dotyczy tylko języków
biologia, chemia, fizyka, filozofia, geografia, historia, historia muzyki, historia sztuki, informatyka, język łaciński i kultura antyczna, język mniejszości narodowej, język obcy nowożytny, język polski, język regionalny, matematyka, wiedza o społeczeństwie	język mniejszości etnicznej (bez określania poziomu) język mniejszości narodowej (bez określania poziomu) język obcy nowożytny (bez określania poziomu lub poziom dwujęzyczny) język regionalny (bez określania poziomu)

- ☒ Aby zdać egzamin maturalny, uczeń musi:
- otrzymać co najmniej **30% punktów** możliwych do uzyskania z egzaminu z każdego przedmiotu obowiązkowego w części pisemnej i ustnej,
 - przystąpić do egzaminu z **jednego przedmiotu dodatkowego** w części pisemnej.
- ☒ Wyniki egzaminów z przedmiotów dodatkowych, do których uczeń przystępuje dobrowolnie, **nie mają wpływu na zdanie egzaminu**. Odnotowuje się je jednak na świadectwie dojrzałości.
- ☒ Wyniki egzaminów z części pisemnej (z przedmiotów obowiązkowych i dodatkowych) podane będą w **procentach oraz na skali centylowej**.



W numerze...

- 2 **Egzamin maturalny z matematyki od roku szkolnego 2014/2015**
Porównanie aktualnej oraz przyszłej formy egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym
- 10 **Struktura nowego arkusza maturalnego z matematyki**
Budowa arkuszy maturalnych na egzaminie maturalnym w 2015 roku
- 15 **Kolej na rachunek różniczkowy**
Nowe treści na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym
- 18 **Podstawa bez podstaw – ocena zmian na maturze od roku szkolnego 2014/2015**
Jak będą punktowane zadania maturalne w 2015 roku?
- 24 **Wyniki egzaminu maturalnego w nowej formie**
Staniny i centyle, czyli o tym, jak umiejętnie interpretować wyniki matur
- 30 **Co zdaje egzamin? Strategie przygotowań maturalnych**
Jakie style uczenia się prezentują przyszli maturzyści i jakich materiałów potrzebują?
- 36 **Geometria na maturze – twardy orzech do zgryzienia**
Kilka rad, jak uczyć geometrii, by uczniowie umieli sobie z nią poradzić na maturze
- 45 **To jest mój dowód... osobisty, czyli o umiejętności dowodzenia twierdzeń**
Jak skutecznie uczyć rozumowania i uzasadniania faktów matematycznych oraz przygotować uczniów do rozwiązywania zadań na dowodzenie?
- 50 **Zasady oceniania zadań otwartych na maturze**
Na co zwrócić uwagę uczniów w rozwiązywaniu zadań otwartych?
- 58 **Równowaga i rozważa – o idealnych proporcjach w wykorzystywaniu publikacji papierowych i cyfrowych**
Jak znaleźć złoty środek w korzystaniu z narzędzi edukacyjnych w formie papierowej oraz cyfrowej?







Egzamin maturalny z matematyki od roku szkolnego 2014/2015

Wprowadzeniu nowej podstawy programowej towarzyszy zmiana w strukturze egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. W arkuszu pojawią się zadania zamknięte i zadania z kodowaną odpowiedzią.

Nowa formuła egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym

Opis egzaminu maturalnego z matematyki zamieszczono w *Informatorze o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015*. Zgodnie z nim egzamin na poziomie rozszerzonym według nowej formuły powinien lepiej mierzyć stopień spełniania przez zdających wymagań ogólnych podstawy programowej. Mniej będzie rozbudowanych zadań sprawdzających znajomość algorytmów i umiejętność posługiwania się nimi w typowych zastosowaniach, więcej natomiast – zadań sprawdzających rozumienie pojęć matematycznych i umiejętność dobierania własnych strategii matematycznych w nietypowych warunkach.

Zakres wiadomości i umiejętności sprawdzanych na egzaminie

Na egzaminie maturalnym sprawdza się, w jakim stopniu abiturient spełnia wymagania z zakresu matematyki określone podstawą

programową kształcenia ogólnego na IV etapie edukacyjnym. Poszczególne zadania zestawu egzaminacyjnego mogą też, w myśl przyjętej w podstawie zasady kumulatywności, odnosić się do wymagań przypisanych etapom wcześniejszym, zwłaszcza etapowi III, czyli gimnazjum.

Podstawa programowa dzieli wymagania na szczegółowe i ogólne oraz wyodrębnia te, które powinny być zrealizowane na poziomie rozszerzonym. Wymagania szczegółowe odwołują się do ściśle określonych wiadomości i konkretnych umiejętności. Podstawowe znaczenie mają jednak wymagania ogólne (Tab. 1, s. 5), stanowiące odpowiedź na pytanie, po co uczymy matematyki. Informują one, jak należy rozumieć podporządkowane im wymagania szczegółowe.

Wymagania szczegółowe zawarte są w nowej podstawie programowej. Największą zmianą w stosunku do egzaminów z lat ubiegłych będzie obecność na maturze zadań z analizy matematycznej oraz prawdopodobieństwa

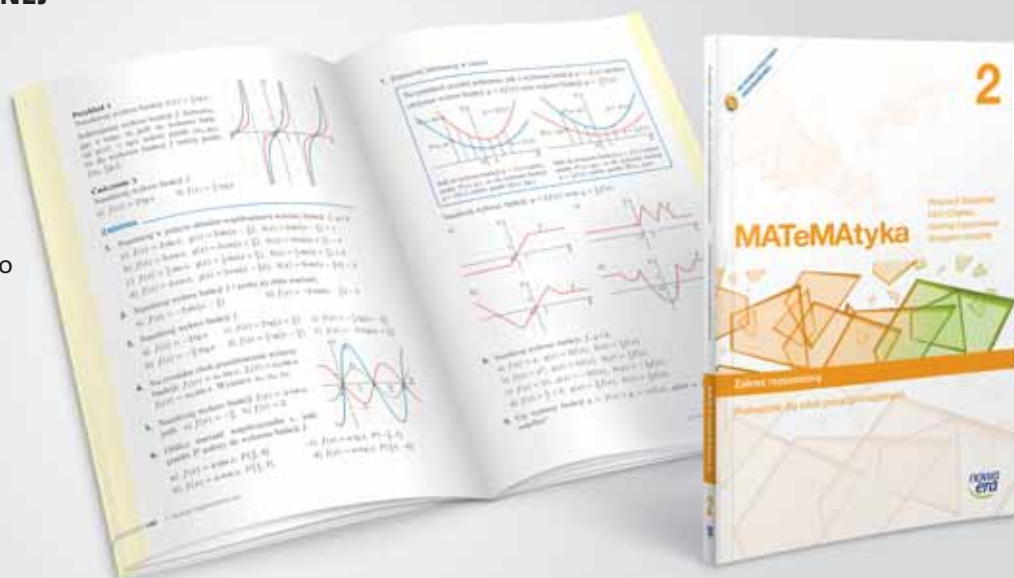
W skrócie

- **Najważniejsze zmiany na egzaminie maturalnym z matematyki w 2015 r.**



UTRWALANIE WIEDZY PRZYDATNEJ NA MATURZE

Seria różnorodnych zadań po każdym temacie, ułożonych od najłatwiejszych do najtrudniejszych, służy utrwaleniu nowo poznanej wiedzy i określeniu stopnia jej opanowania.



Podręcznik *MATEMATYKA 2*, zakres rozszerzony, s. 148–149.

Tabela 1. Cele kształcenia – wymagania ogólne podstawy programowej dla przedmiotu matematyka

Lp.	Wymagania ogólne	Czynności zdającego w zakresie rozszerzonym
I.	Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II.	Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III.	Modelowanie matematyczne.	Zdający buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV.	Użycie i tworzenie strategii.	Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.
V.	Rozumowanie i argumentacja.	Zdający tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

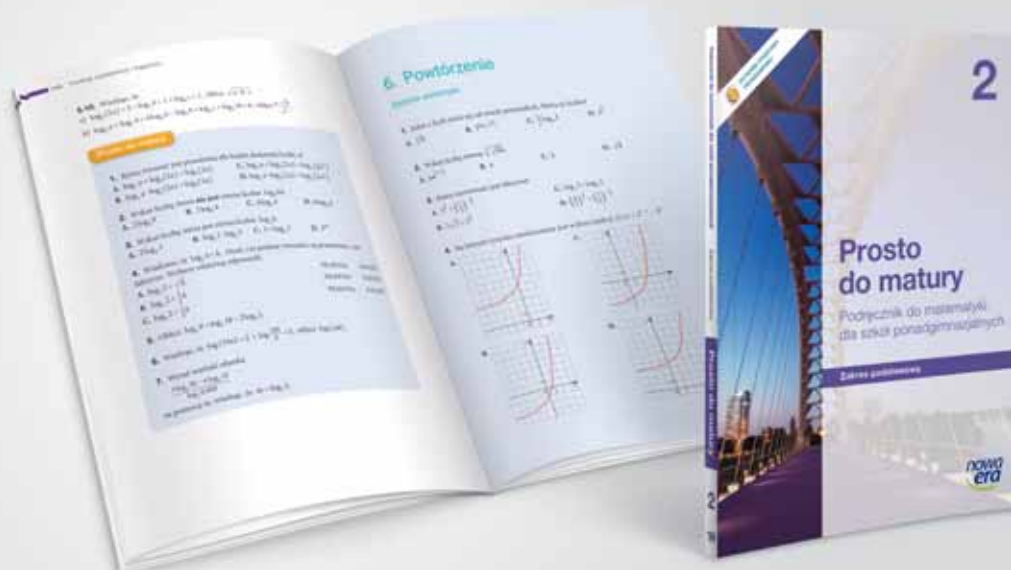
warunkowego i całkowitego. Zwłaszcza zagadnienia dotyczące analizy pozwalają sprawdzić rozumienie pojęć matematycznych i umiejętność tworzenia własnych strategii. Dlatego przygotowując uczniów do matury, należy zwrócić na nie szczególną uwagę.

Mniej będzie rozbudowanych zadań sprawdzających znajomość algorytmów i umiejętność posługiwania się nimi w typowych zastosowaniach, więcej natomiast – zadań sprawdzających rozumienie pojęć matematycznych i umiejętność dobierania własnych strategii matematycznych w nietypowych warunkach.

PROSTO DO MATURY

Zestawy zadań

Prosto do matury na końcu każdego tematu pozwalają na rozpoczęcie przygotowań do egzaminu dojrzałości już od pierwszych lekcji w szkole ponadgimnazjalnej.

Podręcznik *Prosto do matury* 2, zakres podstawowy, s. 144–145.

Charakterystyka arkusza egzaminacyjnego

Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań.

- Grupa I to zadania zamknięte. Zdający wskazuje właściwą odpowiedź, zaznaczając swój wybór na karcie odpowiedzi. Zadania są punktowane w skali 0–1.
- Grupa II to zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, w tym – z kodowaną odpowiedzią. W zadaniach z kodowaną odpowiedzią zdający udziela odpowiedzi, wpisując żądane cyfry otrzymanego wyniku do odpowiedniej tabeli. Ocenie podlega tylko zakodowana odpowiedź. Zadania te są

punktowane w skali 0–2, 0–3 albo 0–4.

- Grupa III to zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Zdający ma się wykazać umiejętnością rozumowania oraz dobierania własnych strategii matematycznych w nietypowych warunkach. Zadania te są punktowane w skali 0–5, 0–6 albo 0–7.

Dotychczasowy arkusz egzaminacyjny na poziomie rozszerzonym zawierał 11–12 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Od 2015 roku arkusz egzaminacyjny będzie zawierał większą liczbę zadań, będzie więc bardziej przekrojowo sprawdzał umiejętności zdających. Z kolei zadania z kodowaną odpowiedzią będą wymagać od zdających doprowadzenia rozwiązania do końca i sformułowania precyzyjnej odpowiedzi. Jest to wyjście naprzeciw wymaganiom niektórych uczelni, m.in. technicznych, które zakładają, że w rozwiązaniu zadania z matematyki istotny jest wynik, a nie rozumowanie zdającego. Warto zwrócić na to uwagę, przygotowując uczniów do egzaminu w zakresie rozszerzonym.

Największą zmianą w stosunku do egzaminów z lat ubiegłych będzie obecność na maturze zadań z analizy matematycznej oraz prawdopodobieństwa warunkowego i całkowitego.

POWTÓRZENIA

Obszerne *Powtórzenie* na końcu każdego działu, na które składają się typowe dla egzaminu maturalnego zadania zamknięte i otwarte, umożliwia uczniom określenie stopnia opanowania wiedzy z danego działu w kontekście wymagań egzaminacyjnych.



Podręcznik *Prosto do matury 1*, zakres podstawowy i rozszerzony, s. 396–397.

Przykłady zadań egzaminacyjnych

W *Informatorze* zamieszczono przykłady różnych typów zadań, które mogą się pojawić na maturze. Warto przyjrzeć się wymaganiom ogólnym i szczegółowym zawartym w podstawie programowej kształcenia ogólnego przedmiotu matematyka, do których się one odnoszą. Dla każdego zadania podano wymagania ogólne z zakresu rozszerzonego (od I do V) oraz wymagania szczegółowe (według numeracji w podstawie programowej). Wymagania z zakresu rozszerzonego oznaczono literą *R*, a wymagania dla gimnazjum, jeśli zadanie je obejmuje – literą *G* (przykład poniżej).

Większość zadań zamieszczonych w *Informatorze* odnosi się do wymagań ogólnych IV i V, czyli tworzenia strategii oraz rozumowania i argumentacji. Zdający mogą wykazać się tymi umiejętnościami zwłaszcza w czasie

rozwiązywania zadań z kombinatoryki, stereometrii i analizy matematycznej.

Ocenianie odpowiedzi zdających

W *Informatorze* szczegółowo opisano sposób oceniania odpowiedzi zdających. W **zadaniach krótkiej odpowiedzi** zdający otrzymuje 1 lub 2 punkty za rozwiązanie, którego nie doprowadził do końca lub w którym popełnił błędy. Określono jednak minimalny postęp, który w rozwiązaniu należy osiągnąć, aby otrzymać 1 punkt, oraz stopień zaawansowania rozwiązania, aby otrzymać 2 punkty.

W rozwiązaniach zadań rozszerzonej odpowiedzi wyróżniono najważniejszą fazę, nazywaną **pokonaniem zasadniczych trudności zadania**, za którą przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie zdający otrzymałby za bezbłędne rozwiązanie. Wyróżniono ponadto

Przykład. Sposób zapisu wymagań w wybranym zadaniu maturalnym

Zadanie 27. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Wymaganie ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Zdający tworzy strategię rozwiązania problemu.

Wymagania szczegółowe

9.2.R Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastoslupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

9.6. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

10.7.G Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Źródło: *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015*, CKE i OKE, Warszawa 2013, s. 92.



ZESTAWY ZADAŃ O RÓŻNYM STOPNIU TRUDNOŚCI

Podział zadań na zestaw łatwiejszy i zestaw trudniejszy pozwala na pracę zarówno z uczniami słabszymi, jak i z tymi szczególnie zainteresowanymi matematyką.



MATeMATyka. Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych 1, zakres podstawowy i rozszerzony, s. 60–61.

W rozwiązaniach zadań rozszerzonej odpowiedzi wyróżniono najważniejszą fazę, nazywaną pokonaniem zasadniczych trudności zadania, za którą przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie zdający otrzymałby za jego bezbłędne rozwiązanie.

kategorię rozwiązań, w których zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i kontynuował rozwiązanie do końca, jednak w rozwiązaniu popełnił błędy niewpływające na poprawność całego rozumowania (np. nieistotne dla całego rozumowania błędy rachunkowe lub niektóre błędy nieuwagi). Analogicznie wyróżniono kategorię pokonania zasadniczych trudności z nieistotnymi błędami. W każdym przypadku określono liczbę punktów przyznawanych w każdej (lub w niektórych) z wymienionych kategorii.

Należy podkreślić, że schemat oceniania rozwiązania zadania jest traktowany jako integralna część zadania; na ogół uwzględnia on wszystkie typowe sposoby rozwiązania, a czasem też nietypowe.

Podsumowanie

Obecność na egzaminie zadań zamkniętych i zadań z kodowaną odpowiedzią zwiększy szansę na obiektywne ocenianie jego wyników. Większa liczba zadań pozwoli na szerszą reprezentację wymagań. Podobnie jak w latach 2005–2014, egzamin maturalny od 2015 roku zapewni jednolitość zadań i kryteriów oceniania w całym kraju.

Przygotowując uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym, należy położyć nacisk m.in. na:

- znajomość różnych pojęć i twierdzeń, które mogą pojawić się w zadaniach zamkniętych,
- umiejętność doprowadzenia zadania do końca, bez błędów rachunkowych, z precyzyjnie sformułowaną odpowiedzią,

Tabela 2. Porównanie zasad egzaminów maturalnych z matematyki na poziomie rozszerzonym do roku szkolnego 2013/2014 oraz od roku szkolnego 2014/2015

	Do roku szkolnego 2013/2014	Od roku szkolnego 2014/2015
Podstawa egzaminu i zakres sprawdzania	wiadomości i umiejętności określone w „Standardach wymagań egzaminacyjnych”	wymagania ogólne i szczegółowe z matematyki określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego na IV etapie edukacyjnym (w zakresie podstawowym i zakresie rozszerzonym) oraz na wcześniejszych etapach edukacyjnych (szkoła podstawowa i gimnazjum)
Rodzaje i formy zadań	otwarte, rozszerzonej odpowiedzi	zamknięte i otwarte krótkiej odpowiedzi (w tym z kodowaną odpowiedzią), otwarte rozszerzonej odpowiedzi
Przedstawianie wyników	w procentach (odsetek punktów uzyskanych za rozwiązanie zadań w arkuszu egzaminacyjnym)	w procentach i na skali centylowej (odsetek zdających, którzy uzyskali wynik taki sam lub niższy)

– zadania nieszablonowe wymagające zaplanowania własnej strategii w nietypowych warunkach.

Warto przeanalizować wyniki egzaminu maturalnego z poprzednich lat (np. od kilku lat najtrudniejsze dla zdających są zadania z kombinatoryki), a wnioski z obserwacji wykorzystać w bieżącej pracy. Ważne jest również motywowanie uczniów do podejmowania trudu zdawania egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym w kontekście przyszłej kariery zawodowej.

Obecność na egzaminie zadań zamkniętych i zadań z kodowaną odpowiedzią zwiększy szansę na obiektywne ocenianie jego wyników. Większa liczba zadań pozwoli na szerszą reprezentację wymagań.

Maciej Bugaj

Nauczyciel matematyki w XVIII LO
im. Jana Zamoyskiego w Warszawie,
egzaminator maturalny.

Struktura nowego arkusza maturalnego z matematyki

Jak od roku szkolnego 2014/2015 będzie wyglądać matura z matematyki? Informacje na ten temat są wciąż niepełne. Odpowiedzi na wiele pytań można znaleźć w *Informatorze o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015* opublikowanym w sierpniu 2013 r. przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Pewnych wskazówek dostarczają zamieszczane co roku na stronach CKE sprawozdania z egzaminów maturalnych z poszczególnych przedmiotów, zwłaszcza komentarze, które znajdują się na końcu części poświęconych matematyce. Omówię je z podziałem na zakresy kształcenia.

Poziom podstawowy

Na tym poziomie struktura egzaminu się nie zmieni. Tak jak dotychczas uczniowie będą rozwiązywać trzy typy zadań: zadania zamknięte, zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

Warto przyjrzeć się arkuszom egzaminacyjnym z ostatnich lat, począwszy od roku 2010, kiedy matura z matematyki stała się przedmiotem obowiązkowym. Okazuje się, że arkusze były do siebie podobne. Średnie procentowe wyniki matury w latach 2010–2013 były zbliżone i wynosiły odpowiednio: 59, 48, 56 i 54. Wyjątkiem był rok 2011. Arkusz z tego roku jako jedyny zawierał tylko 23 zadania

zamknięte, a w pozostałych latach z tego okresu ich liczba była zawsze największa z możliwych (25). Potwierdzałoby to tezę, że **zadania zamknięte w dużym stopniu wpływają na wynik matury**. Można się więc spodziewać, że również po roku 2014 autorzy będą zamieszczać w arkuszu możliwie jak najwięcej takich zadań.

Jeśli chodzi o zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, można zauważyć, że pewne ich typy powtarzały się w kolejnych latach. Nierówność kwadratowa pojawiała się co roku, równanie trzeciego stopnia nie wystąpiło tylko raz, notabene właśnie w roku 2011. Trzykrotnie pojawiło się przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych. W każdym roku w tym okresie arkusz zawierał dwa zadania na dowodzenie, w tym jedno z geometrii. Zostawało więc bardzo niewiele miejsca na zadania innego typu.

Zestaw zadań rozszerzonej odpowiedzi w kolejnych latach także niewiele się zmieniał. Zadanie za 5 punktów, najwyższej punktowane

W skrócie



- Budowa nowego arkusza maturalnego.
- Nowe typy zadań na poziomie rozszerzonym.

PRZED OBOWIĄZKOWĄ MATURĄ Z MATEMATYKI

Zestawy zadań na końcu każdego działu, podzielone zgodnie z układem arkusza maturalnego na zadania zamknięte, krótkiej odpowiedzi i rozszerzonej odpowiedzi, wraz z punktacją, pozwalają zapoznać się z typowymi zadaniami maturalnymi obejmującymi zagadnienia z danego działu oraz opanować umiejętność ich rozwiązywania.



Podręcznik *MATEMATYKA 2*, zakres podstawowy, s. 232–233.

w całym arkuszu, zawsze miało praktyczny kontekst, a jego rozwiązywanie prowadziło do równania kwadratowego z jedną niewiadomą. Oprócz tego co roku pojawiało się zadanie ze stereometrii, natomiast trzecie z zadań w tej grupie zmieniało się w kolejnych latach i obejmowało zagadnienia z rachunku prawdopodobieństwa, z ciągów, z geometrii analitycznej albo z planimetrii.

Wszystkie wymienione zagadnienia, poza równaniem trzeciego stopnia, występują w nowej podstawie programowej i zapewne będą towarzyszyć maturzystom w następnych latach.

Za każde z zadań otwartych krótkiej odpowiedzi można było otrzymać maksymalnie 2 punkty. Ta zasada będzie obowiązywać również po roku 2014. Moim zdaniem ogranicza ona istotnie możliwość umieszczenia w arkuszu zadań pewnych typów. Każdy nauczyciel zdaje sobie przecież sprawę, jak wygodne jest punktowanie zadań krótkiej odpowiedzi w skali 0–3 lub 0–4 punktów. Typowym przykładem jest rysowanie wykresu funkcji kwadratowej

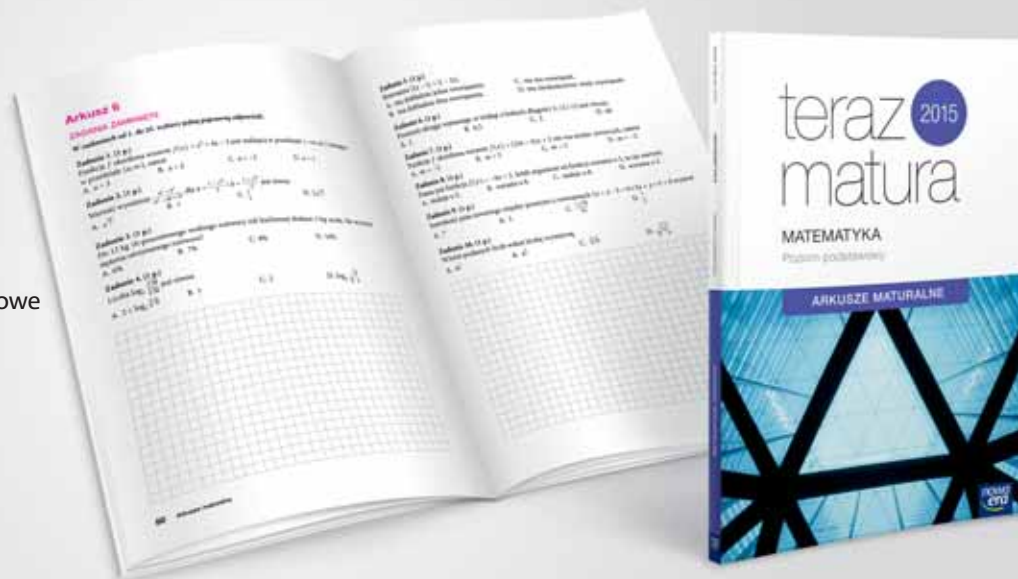
Na poziomie podstawowym struktura egzaminu się nie zmienia. Tak jak dotychczas uczniowie będą rozwiązywali trzy typy zadań: zadania zamknięte, zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

na podstawie jej postaci ogólnej. Nie jest to zadanie problemowe, zatem nie można na maturze umieścić go w ostatniej grupie. Jednak nie sposób rozsądnie przyznać za jego rozwiązanie 2 punktów, nie może więc pojawić się na egzaminie. Zresztą ani razu na egzaminie nie wystąpiło zadanie wymagające narysowania wykresu jakiejkolwiek funkcji.

Powtarzalność na maturze w kolejnych latach pewnych typów zadań powinna skłonić uczniów i nauczycieli do wyciągnięcia wniosków, które mogłyby wpłynąć na poprawę wyników tego egzaminu. Średnie wyniki egzaminów pokazują, że to niestety nie nastąpiło.

**ARKUSZE
MATURALNE**

Zestawy zadań egzaminacyjnych wzorowane na arkuszach CKE z lat ubiegłych pozwalają na oswojenie się z formą egzaminu maturalnego i przekrojowe sprawdzenie wiedzy przed egzaminem.



Arkusze maturalne, *Teraz matura*, matematyka, poziom podstawowy, s. 50–51.

Poziom rozszerzony

Na tym poziomie zmiany są istotne, po części dlatego, że do podstawy programowej wracają analiza matematyczna i zaawansowany kurs rachunku prawdopodobieństwa. Zmiany dotyczą również struktury arkusza egzaminacyjnego. Pojawią się w nim zadania zamknięte. Na podstawie *Informatora* nie sposób jednoznacznie ustalić, jak będą one wyglądać. Umieszczone w nim dwa przykłady to zadania zamknięte z czterema wersjami odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna.

Na tym poziomie zmiany są istotne, po części dlatego, że do podstawy programowej wracają analiza matematyczna i zaawansowany kurs rachunku prawdopodobieństwa. Zmiany dotyczą również struktury arkusza egzaminacyjnego. Pojawią się w nim zadania zamknięte.

Nie wiemy, czy na maturze pojawią się zadania zamknięte innych typów, np. wielokrotnego wyboru. Nie powinny one jednak sprawić kłopotu zdającemu, gdyż zna je dobrze z wcześniejszych etapów nauki, np. z egzaminu gimnazjalnego.

Podział zadań otwartych w tym arkuszu na zadania krótkiej i rozszerzonej odpowiedzi wydaje się mało wyraźny. Za zadania z pierwszej grupy zdający może otrzymać maksymalnie 2, 3 lub 4 punkty, za zadania z drugiej grupy – 5, 6 lub 7 punktów. W *Informatorze* można znaleźć przykłady zadań z obu wymienionych grup, nieznacznie różniące się treścią i zupełnie nieróżniące się długością wzorcowego rozwiązania. Zdaniem CKE przy rozwiązywaniu zadań rozszerzonej odpowiedzi zdający powinien wykazać się „umiejętnością rozumowania oraz dobierania własnych strategii matematycznych do nietypowych warunków”. Tymczasem to właśnie wśród zadań krótkiej odpowiedzi znajdują się zadania na dowodzenie, a do drugiej grupy

ZADANIA Z KODOWANĄ ODPOWIEDZIĄ

Dzięki nim uczniowie mają możliwość oswojenia się z nowymi typami zadań oraz nowym sposobem zapisywania odpowiedzi na egzaminie maturalnym.



Arkusze maturalne, *Teraz matura*, matematyka, poziom rozszerzony, s. 54–55.

trafiły dobrze znane nauczycielom zadania optymalizacyjne z wykorzystaniem pochodnej, równania kwadratowe z parametrem i zadania z geometrii analitycznej, np. dotyczące równania stycznej do okręgu. Wspomniane „nietypowe warunki” w rzeczywistości nie powinny więc zaskoczyć uczniów dobrze przygotowanych do egzaminu. Jedyne, czego mogą się obawiać, to zagadnień z geometrii i kombinatoryki, które zawsze sprawiały zdającym najwięcej problemów, bo przy ich rozwiązywaniu często trzeba się wykazać doborem własnej strategii i rozwiązanie wymyślić, a nie odtworzyć.

Wydaje się jednak, że największą rewolucją będzie zamieszczenie w tym arkuszu zadań z kodowaną odpowiedzią. Ma to służyć obiektywizacji oceniania – takie zadania mogą być bowiem sprawdzane przez komputer. Krótka analiza podanych w *Informatorze* przykładów prowadzi do ciekawych wniosków. W jednym z zadań uczeń musi wykorzystać podobieństwo trójkątów do obliczenia długości odcinka,

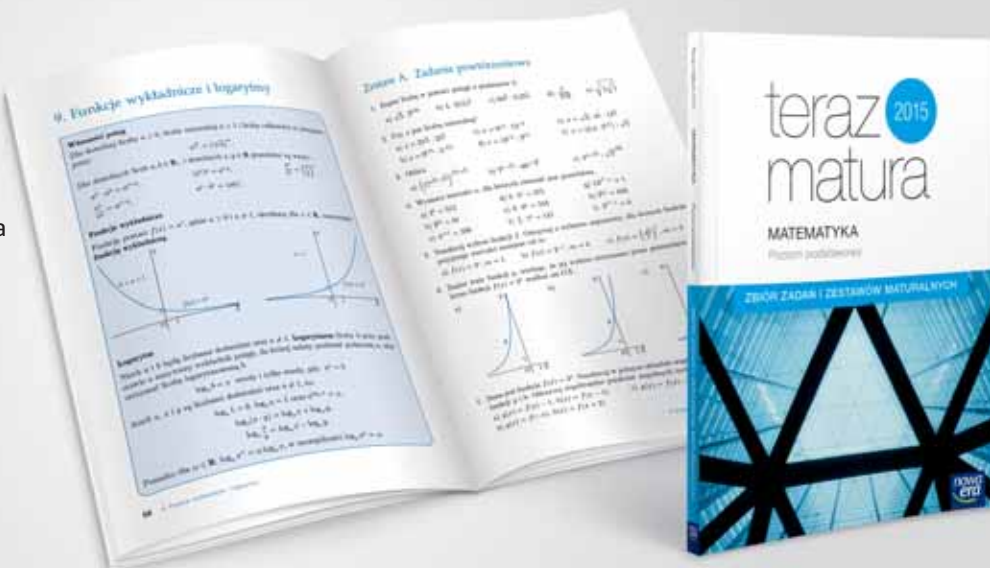
Do tej pory wytyczne dla egzaminatorów były wyraźne – błędy rachunkowe, nawet na wczesnym etapie rozwiązania, tylko nieznacznie obniżały końcowy wynik, jeśli zdający był w dochodzeniu do rozwiązania konsekwentny. Od roku 2015 taka nieuwaga na egzaminie maturalnym będzie już dość kosztowna.

znaleźć rozwinięcie dziesiętne tej liczby i zakodować jej cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku. Ocenie podlega tylko zakodowana odpowiedź, więc najmniejszy błąd rachunkowy skutkuje utratą wszystkich trzech punktów.

Z jednej strony cieszy to, że zadanie trzeba doprowadzić do końca. W zadaniach z matematyki najważniejszy jest przecież wynik i przyszły inżynier albo ekonomista nie powinien usprawiedliwiać błędnych obliczeń tym, że np. „nie zauważył minusa”. Jednak takie

**PRZYPOMNIENIE
WIADOMOŚCI**

Zwięzłe powtórzenia najważniejszych treści przed każdym działem ułatwiają powtórzenie zagadnień, których znajomość jest potrzebna w danej chwili.



Zbiór zadań i zestawów maturalnych, *Teraz matura*, matematyka, poziom podstawowy, s. 56–57.

Największą rewolucją będzie zamieszczenie w arkuszu zadań z kodowaną odpowiedzią. Ma to służyć obiektywizacji oceniania – takie zadania mogą być bowiem sprawdzane przez komputer.

punktowanie zadań zupełnie zmienia dotychczasowy sposób oceniania uczniowskich błędów. Do tej pory wytyczne dla egzaminatorów były wyraźne – błędy rachunkowe, nawet na wczesnym etapie rozwiązania, tylko nieznacznie obniżały końcowy wynik, jeśli zdający był w dochodzeniu do rozwiązania konsekwentny. W niektórych przypadkach w ogóle nie zaniżały punktacji i nazywano je

„błędami nieuwagi”. Od roku 2015 taka nieuwaga na egzaminie maturalnym będzie już dość kosztowna.

Można mieć nadzieję, że zmiany w strukturze egzaminu na poziomie rozszerzonym wszystkim wyjdą na dobre. Zadania zamknięte przyczynią się do większej obiektywizacji wyniku, a zadania problemowe sprawią, że uzyskanie wyniku bliskiego 100% będzie świadczyło o wysokim poziomie zarówno wiedzy, jak i umiejętności zdającego.

Maciej Bugaj

Nauczyciel matematyki w XVIII LO im. Jana Zamoyskiego w Warszawie, egzaminator maturalny.

Kolej na rachunek różniczkowy?

CKE zaprezentowała przykładowe arkusze maturalne z matematyki na poziomach podstawowym i rozszerzonym od roku szkolnego 2014/2015. Co można wywnioskować z ich lektury? Czy nowe treści podstawy programowej zajmują w nich istotne miejsce?

Najistotniejsze zmiany w podstawie programowej na poziomie rozszerzonym to dodanie nowych treści, takich jak: prawdopodobieństwo całkowite i warunkowe, granice ciągów, szeregi geometryczne i bardzo obszerny dział o rachunku różniczkowym. Jeżeli przyjrzymy się przykładowemu arkuszowi CKE dla poziomu rozszerzonego, okaże się, że za rozwiązanie zadań z nowymi treściami można zdobyć dokładnie 50% punktów, w tym:

- 6% punktów za zadania o ciągach,
- 20% punktów za zadania z rachunku prawdopodobieństwa,
- 24% punktów za zadania z rachunku różniczkowego.

Dwa najwyżej punktowane zadania rozszerzonej odpowiedzi dotyczą prawdopodobieństwa całkowitego i optymalizacji.

Czy tak będzie na maturze? Trudno odpowiedzieć na podstawie jednego przykładowego arkusza. W związku z maturą rozszerzoną pytań nasuwa się więcej. Dlaczego rachunek różniczkowy był dawniej na maturze, później go usunięto, a obecnie znów się pojawił?

Czy należy traktować to tylko jako zmianę, czy może powrót do tego, co się sprawdziło? I mocniejsze pytanie – dlaczego rachunek różniczkowy nie jest obowiązkowy dla wszystkich uczniów? Przecież „prędkość” to dzisiaj jedno z najpowszechniejszych słów, a rachunek różniczkowy znajduje zastosowanie we wszystkim, co się porusza, zmienia, np. w każdym samochodzie jest prędkościomierz, który pokazuje pochodną po czasie wskazań licznika odległości. Rachunek różniczkowy w zakresie wymaganym w podstawie programowej nie jest dziedziną dostępną tylko dla nielicznych, obdarzonych talentem. Jest dziedziną, którą może poznać każdy uczeń.

Warto zapytać, czy wiedza i umiejętności z zakresu rachunku różniczkowego powinny być sprawdzane za pomocą zadań zamkniętych lub kodowanych. CKE obiecywała, że „więcej będzie zadań sprawdzających rozumienie pojęć matematycznych oraz umiejętność dobierania własnych strategii matematycznych do nietypowych warunków”. A w arkuszu matury rozszerzonej są zadania, które nie



W skrócie

- **Nowe treści na poziomie rozszerzonym.**

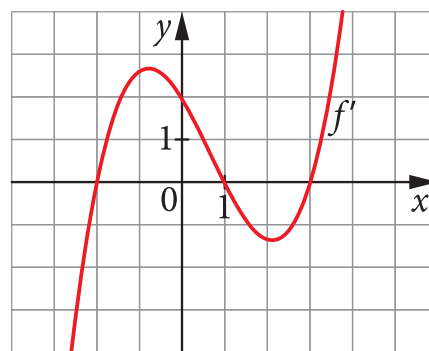
wymagają rozumowania, lecz odtwarzania, podstawiania do wzoru z zestawu wzorów, np. pojawiają się polecenia typu: „Oblicz granicę/pochodną/sumę szeregu...”. Tymczasem można ułożyć wiele krótkich zadań, które sprawdzają rozumienie pojęć, umiejętność logicznego myślenia. Przykładem niech będzie takie oto zadanie.

Rachunek różniczkowy jest narzędziem do opisywania m.in. rzeczywistych zjawisk z perspektywy ekonomii, opłacalności. Pomaga znaleźć najkorzystniejszą opcję, rozwiązywać praktyczne problemy. Przy odrobinie wysiłku można ułożyć takie zadania, które uczniom nieprzekonanym do matematyki pozwolą uwierzyć, że nauka ta jest im w życiu potrzebna.

Zadanie 1.

Na rysunku przedstawiono wykres pochodnej funkcji f . Wynika stąd, że funkcja f jest rosnąca

- A. w przedziale $(-\infty; -1)$ i w przedziale $(2; \infty)$.
- B. w przedziale $(-2; 1)$ i w przedziale $(3; \infty)$.
- C. tylko w przedziale $(-2; \infty)$.
- D. tylko w przedziale $(-\infty; -1)$.



Źródło: Opracowanie własne autora.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY W PRAKTYCE

Ciekawe zadania pokazują uczniom zastosowanie rachunku różniczkowego w rozwiązywaniu zagadnień z życia codziennego.



MATeMATyka. Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych 2, zakres podstawowy i rozszerzony, s. 202–203.


Przykład. Standardowe zadanie z arkusza maturalnego, poziom rozszerzony
Zadanie 1. (0–1)

Dane są dwie urny z kulami, w każdej jest 5 kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i 4 kule czarne. W drugiej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno lub dwa oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, natomiast jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A. $\frac{1}{15}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{7}{15}$

D. $\frac{3}{5}$

Źródło: CKE, Matura 2015 – Przykładowe zestawy zadań. Matematyka, poziom rozszerzony.

Rachunek różniczkowy jest narzędziem do opisywania m.in. rzeczywistych zjawisk z perspektywy ekonomii, opłacalności. Pomaga znaleźć najkorzystniejszą opcję, rozwiązywać praktyczne problemy. Niestety zarówno w zadaniach pochodzących z arkusza maturalnego, jak i z *Informatora* CKE występują na ogół zadania teoretyczne (przykład powyżej). A przecież przy odrobinie wysiłku można ułożyć takie zadania, które uczniom nieprzekonanym do matematyki pozwolą uwierzyć, że nauka ta jest im w życiu potrzebna.

Oczywiście nie mam nic przeciwko takiemu zadaniu. Dlaczego jednak w arkuszu nie ma zadań podobnych do poniższego?

Ta sama uwaga dotyczy zadań z pozostałych działów. Zadania optymalizacyjne, zamiast dotyczyć szukania maksymalnych objętości brył, powinny być bardziej związane z życiem, by w każdym momencie przypominać o pożyteczności matematyki.

Cieszy mnie, że uczniowie już nie mierzą się z prędkościami pociągów jadących z miasta A do miasta B, że nadszedł czas rachunku różniczkowego. Szkoda jednak, że wrócił on do szkoły w okrojonej formie (bez asymptot, pochodnych funkcji trygonometrycznych, złożonych) i tylko dla zakresu rozszerzonego. Miejmy nadzieję, że uczelnie techniczne będą miały pożytek z powrotu tego działu do programu nauczania.

Zadanie 2.

Kuba zapomniał ostatniej cyfry numeru telefonu, więc wybierał ją przypadkowo. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybierał numer nie więcej niż trzy razy.

Źródło: Opracowanie własne autora.

Marcin Wesółowski

Nauczyciel matematyki w Publicznym Liceum Ogólnokształcącym nr V w Opolu.





Thinkstock/Getty Images/iStock/Helefy

Podstawa bez podstaw – ocena zmian na maturze od roku szkolnego 2014/2015

Czy autorom zmian w podstawie programowej z matematyki oraz w egzaminie maturalnym przyświecała myśl Arystotelesa: *Matematyka jest miarą wszystkiego?* Oceńcie Państwo po lekturze tego artykułu.

„**M**atematyka jest niezbędnym narzędziem i językiem potrzebnym do korzystania z ogromnej części dorobku cywilizacyjnego. (...) Wiadomo też, że *myślenie matematyczne* jest cenione przez wykładowców innych kierunków (...). Rozwijanie tego typu myślenia jest bardzo ważne dla ogólnego rozwoju ucznia (...). Zachodzi potrzeba zaprojektowania i wdrożenia zmian, które zapewnią lepsze efekty kształcenia. (...)” – tymi słowami MEN uzasadnia wprowadzone zmiany w podstawie programowej z matematyki. Najważniejsze ze zmian to zwiększenie wymagań na poziomie rozszerzonym i jednocześnie zmniejszenie

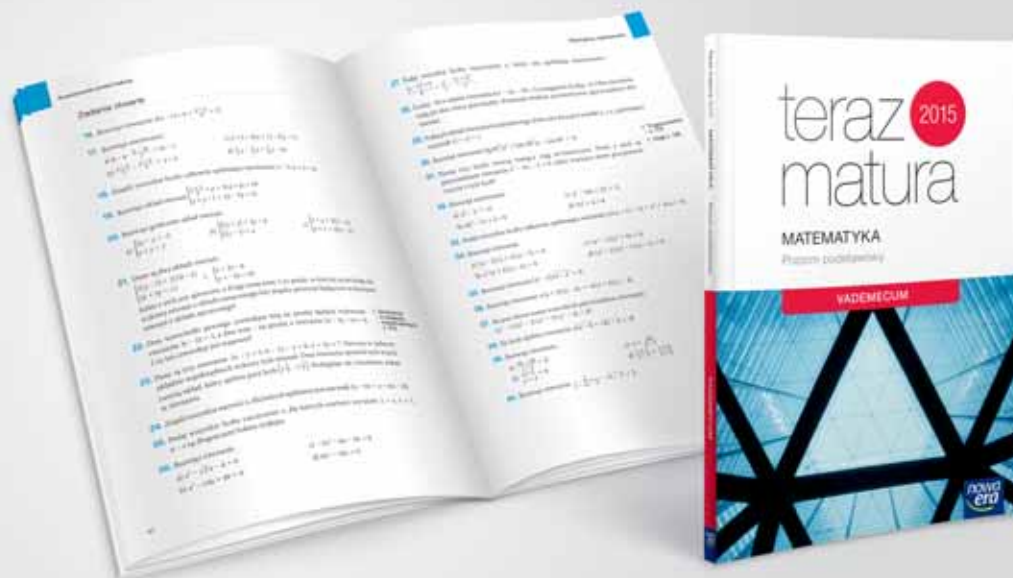
wymagań na poziomie podstawowym. Na poziomie rozszerzonym włączono do programu rachunek różniczkowy i poszerzono wymagania z zakresu kombinatoryki oraz teorii prawdopodobieństwa. Z zakresu podstawowego przeniesiono do rozszerzenia rozkład wielomianu na czynniki, działania na wielomianach, kombinatorykę, wartość bezwzględną zawierającą symbole literowe, posługiwanie się równaniem okręgu. W podstawie programowej nie ma już elementów teorii mnogości. W zakresie podstawowym po zmianach mamy więc podstawę... bez podstaw.

W komentarzu do podstawy programowej czytamy: „O tym, jaka będzie wykładnia podstawy programowej, zadecyduje praktyka nauczania i praktyka egzaminów maturalnych”. Sięgam więc do *Informatora o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015*, a tam zmiany w egzaminie maturalnym mające na celu lepsze niż dotychczas zmierzenie, w jakim stopniu uczniowie spełniają wymagania podstawy programowej. CKE zapewnia:

Na egzaminie maturalnym od roku 2015 nie ulegnie zmianie wygląd arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym, natomiast istotnie zmieni się on na poziomie rozszerzonym.

ODSYŁACZE DO TEORII

Umieszczone przy zadaniach przekrojowych ułatwiają korzystanie z publikacji i wspomagają proces uczenia się.



Vademecum, *Teraz matura*, matematyka, poziom podstawowy, s. 40–41.

„W efekcie mniej będzie rozbudowanych zadań sprawdzających znajomość algorytmów i umiejętność posługiwania się nimi w typowych zastosowaniach, więcej natomiast zadań sprawdzających rozumienie pojęć matematycznych oraz umiejętność dobierania własnych strategii matematycznych do nietypowych warunków”. Na egzaminie maturalnym od roku 2015 nie ulegnie zmianie wygląd arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym, natomiast istotnie zmieni się on na poziomie rozszerzonym. Zgodnie z zapisami we wspomnianym *Informatorze*:

- arkusz dla poziomu podstawowego nadal będzie się składał z trzech grup zadań: zadań zamkniętych punktowanych w skali 0–1, zadań otwartych krótkiej odpowiedzi punktowanych w skali 0–2 i zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi punktowanych w skali 0–4, 0–5 lub 0–6;
- arkusz dla poziomu rozszerzonego będzie się składał nie tylko z zadań otwartych, będą

w nim trzy grupy zadań: zadania zamknięte punktowane w skali 0–1, zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, w tym z kodowaną odpowiedzią (ocenie podlega tylko zakodowana odpowiedź), punktowane w skali 0–2, 0–3 albo 0–4 oraz zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi punktowane w skali 0–5, 0–6 albo 0–7.

Nowością na poziomie rozszerzonym będą zadania zamknięte oraz zadania otwarte z kodowaną odpowiedzią. W *Informatorze* podano pięć przykładów zadań kodowanych: cztery punktowane w skali 0–2 i jedno punktowane w skali 0–3. Czy mogą się pojawić zadania punktowane w skali 0–4? Opisane w *Informatorze* zasady oceniania dotyczące zadań otwartych krótkiej odpowiedzi nie pasują do zadań kodowanych. Skoro ocenie podlega tylko zakodowana odpowiedź, to sądzę, że w zadaniu punktowanym 0–3 są tylko dwie możliwości przyznania punktów: 0 punktów lub 3 punkty, a w zadaniu kodowanym punktowanym 0–2 – jedynie 0 punktów lub 2 punkty.

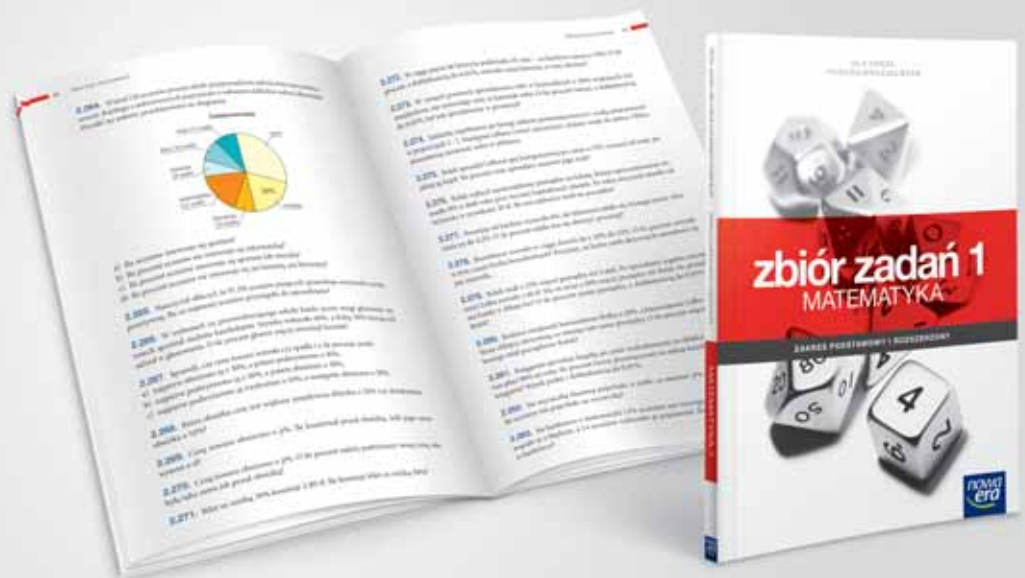


W skrócie

- Jak będą punktowane zadania maturalne w 2015 r.?

ZADANIA O KONTEKŚCIE PRAKTYCZNYM

Nieszablonowe zadania osadzone w kontekście praktycznym motywują uczniów do znajdowania rozwiązań problemów z życia codziennego z wykorzystaniem algorytmów matematycznych.



Zbiór zadań 1. Matematyka, zakres podstawowy i rozszerzony, s. 52–53.

Nowością na poziomie rozszerzonym będą zadania zamknięte oraz zadania otwarte z kodowaną odpowiedzią.

Czy zadania zamknięte i zadania otwarte z kodowaną odpowiedzią będą lepiej sprawdzać wiedzę i umiejętności maturzystów niż zadania otwarte? Odpowiedzi na zadania zamknięte udziela się bez żadnego uzasadnienia, nawet losowo, z dużym prawdopodobieństwem podania prawidłowej odpowiedzi. Tymczasem za zadanie kodowane maturzysta może nie otrzymać punktów, mimo że posiada sprawdzaną umiejętność, ale np. zrobił pomyłkę rachunkową lub jego rozwiązanie jest po części niepoprawne.

Niektóre efekty zmian w arkuszu rozszerzonym łatwo przewidzieć. Na skutek wprowadzenia zadań zamkniętych i kodowanych z pewnością podniesie się średni wynik procentowy i łatwiejsze będą sprawdzanie oraz

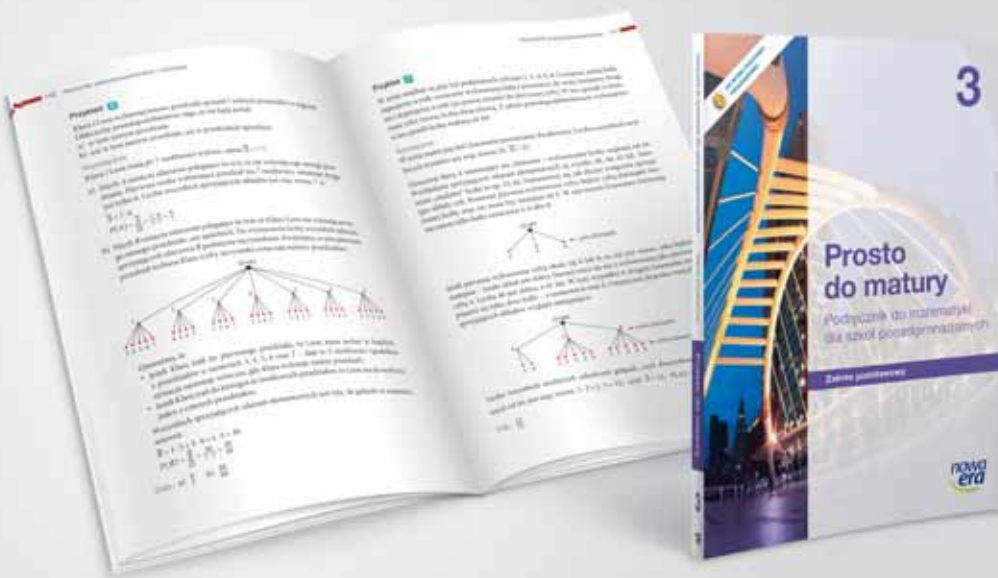
punktowanie, dzięki czemu zmniejszą się koszty przeprowadzania matury. Czy poprawią się efekty kształcenia matematyki, zgodnie z założonym celem wprowadzonych zmian? Czy raczej się pogorszą? Zależy to m.in. od:

- procentu punktów, jaki w arkuszu będą stanowić zadania zamknięte, kodowane i otwarte,
- punktowania zadań w zależności od stopnia ich trudności,
- sprawdzanych wymagań.

Do tej pory arkusz podstawowy składał się zarówno z zadań zamkniętych, jak i otwartych, przy czym za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań zamkniętych uczniów otrzymywał 50% ogólnej liczby punktów przypadających na arkusz. W zaprezentowanym przez CKE przykładowym zestawie zadań dla poziomu podstawowego punktacja rozłożona jest podobnie – za zadania zamknięte można otrzymać niecałe 50% punktów przypadających na arkusz.

RÓŻNE SPOSOBY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ

Przedstawienie różnych metod rozwiązania tego samego zadania ułatwia uczniom naukę trudnych zagadnień, np. z rachunku prawdopodobieństwa. Czytelne rysunki i schematy pomagają zrozumieć zależności, których znajomość jest niezbędna na maturze z matematyki.



Podręcznik *Prosto do matury 3*, zakres podstawowy, s. 110–111.



Przykład. Zadanie maturalne z *Informatora*, poziom rozszerzony

Zadanie 21. (0–5)

Okrąg o środku $S = (3, 2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Źródło: *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015*, CKE i OKE, Warszawa 2013, s. 86.

Natomiast arkusz z poziomu rozszerzonego, który dotychczas zawierał wyłącznie zadania otwarte, w nowej wersji został rozbudowany o zadania zamknięte i zadania z kodowaną odpowiedzią. Nadal jednak największą wagę mają zadania otwarte – za ich rozwiązanie można otrzymać ponad 70% punktów przypadających na arkusz.

Analiza trudności zadań z wcześniejszych matur oraz tych opisanych w *Informatorze* pokazuje, że zadania dla uczniów najtrudniejsze, wymagające umiejętności rozumowania i argumentowania, miały i nadal mają punktację 0–2 w zakresie podstawowym i 0–3 w zakresie rozszerzonym. Wbrew logice punktów nie przyznawano i nadal się nie przyznaje za stopień trudności zadań, mimo że po każdej maturze obliczane są wskaźniki łatwości wszystkich zadań. Więc za co się je przyznaje? Może za długość rozwiązania? Taka praktyka prowadzi do obniżenia poziomu egzaminu, a uzyskany w ten sposób wynik punktowy nie pokazuje stopnia przygotowania maturzysty do następnego etapu kształcenia, czyli do studiów.

Wychodzę z założenia, że aby móc wymagać od innych, trzeba najpierw wymagać od siebie. Zadania maturalne bezwzględnie powinny być poprawnie sformułowane pod względem merytorycznym. Tymczasem w *Informatorze* znajdujemy przykład zadania na poziomie rozszerzonym zamieszczony powyżej. Odnosząc się do jego treści, muszę stwierdzić, że nie jest

on odpowiednio przygotowany pod względem merytorycznym.

Okiem Nauczyciela

Wnętrze okręgu to przecież zbiór pusty, okrąg to niepusty zbiór punktów, a zbiór nie leży, lecz jest zawarty. Sformułowanie powinno zatem brzmieć: okrąg zawarty w kole. Mamy zatem dwa błędy w tak krótkim zadaniu. Czy dlatego, że w komentarzu do podstawy programowej czytamy: *Nie wymaga się od maturzysty systematycznego stosowania języka zbiorów ani znajomości specjalnych symboli, tak jak np. $x \in A$ czy $A \cap B$* ? Nawet jeśli nie wymaga się tego od maturzysty, to już od autorów zadań maturalnych bezwzględnie wymagać należy.

Podsumowanie

Próbowałem uczyć matematyki w zakresie podstawowym zgodnie ze zmianami w podstawie i egzaminie maturalnym. I dla mnie, i dla moich uczniów była to droga przez mękę, a matematyka brzydła. Szczęśliwie jednak „(...) podstawa określa, co uczeń ma umieć, natomiast nauczyciel może uczyć więcej i szerzej”.

Marcin Wesołowski

Nauczyciel matematyki w Publicznym Liceum Ogólnokształcącym Nr V w Opolu.

Wyniki egzaminu maturalnego w nowej formie

Rozpoczęta w 2009 roku reforma systemu edukacji weszła już do szkół ponadgimnazjalnych i niebawem po raz pierwszy abiturienti napiszą egzamin maturalny dostosowany do nowej podstawy programowej. Akty prawne, oprócz regulacji o charakterze zasadniczym, wprowadziły wiele zmian doskonalących funkcjonowanie poszczególnych składowych całego systemu oświaty. Jeden z takich elementów jest związany z opracowywaniem, analizą i sposobem podawania wyników egzaminów zewnętrznych, w szczególności matur.

W skrócie



- Czy rankingi szkół dają właściwy obraz pracy szkoły?
- Narzędzia stosowane w diagnostyce edukacyjnej.

Nieumiejętne odczytanie wyników matury w konkretnej szkole, mieście czy w województwie może dać bardzo niesprawiedliwą ocenę sprawności edukacyjnej uczniów. Stwierdzenie: „Rok temu średni wynik matury z matematyki kształtował się na poziomie 64%, a w tym roku wyniósł 53%, z czego wynika, że nauczanie w szkole (powiecie, województwie) funkcjonuje gorzej i jest mniej skuteczne” może okazać się dalekie od prawdy. Rankingi szkół oparte wyłącznie na średnich wynikach, np. z ostatnich matur, czy na prostych wskaźnikach procentowych, nie dają bowiem właściwego obrazu pracy szkoły czy nauczyciela. Takie porównywanie może być miarodajne

jedynie wówczas, gdy do obu pomiarów używa się tych samych narzędzi diagnostycznych i oba badania są przeprowadzane w identycznych warunkach. Podobnie wydawanie opinii o tym, który z dwóch uczniów jest lepszy, a który słabszy, bez gruntownej analizy może okazać się dla każdego z nich krzywdzące.

W rozporządzeniu MEN z dnia 25 kwietnia 2013 r. zmieniającym rozporządzenie w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów w szkołach publicznych znalazły się następujące zapisy:

„Wyniki części pisemnej egzaminu maturalnego są wyrażane w procentach i na skali

centylowej. (...) Wyniki egzaminu maturalnego z dodatkowych zadań egzaminacyjnych (...) są wyrażane w procentach. (...)

Wyniki części pisemnej egzaminu maturalnego z poszczególnych przedmiotów na skali centylowej ustala Komisja Centralna na podstawie wyników ustalonych przez komisje okręgowe”.

Zapisy te wchodzi w życie z dniem 1 września 2014 r. O nowej formie podawania wyników matur wspomina także CKE w *Informatorze o egzaminie maturalnym od roku szkolnego 2014/2015*, pisząc:

„Świadectwo zawiera szczegółowe wyniki, jakie zdający uzyskał. W przypadku egzaminów w części pisemnej (zarówno z przedmiotów obowiązkowych, jak i dodatkowych) podane będą dwie liczby: wynik w procentach oraz wynik na skali centylowej.

- a) Wynik w procentach to odsetek punktów (zaokrąglony do liczby całkowitej), które absolwent uzyskał za rozwiązanie zadań zawartych w arkuszu egzaminacyjnym. (...)
- b) Wynik na skali centylowej to odsetek liczby maturzystów (zaokrąglony do liczby całkowitej), którzy uzyskali z danego przedmiotu na danym poziomie wynik taki sam lub niższy niż dany absolwent”.

Nie został jeszcze opublikowany nowy wzór świadectwa maturalnego, uwzględniający te wymogi, ale wzorując się na zaświadczeniu o zdaniu egzaminu gimnazjalnego, w którym takie zapisy są już stosowane, można przypuszczać, że informacja w nim zawarta będzie wyglądała mniej więcej tak:

- fizyka – poziom rozszerzony 38%
(wynik taki sam lub niższy uzyskało 25% zdających),
- geografia – poziom rozszerzony 25%
(wynik taki sam lub niższy uzyskało 20% zdających).

Zaproponowana przez centralne urzędy forma podawania wyników matur brzmi zawile i zawiera trudne pojęcia z języka statystyki matematycznej, z którymi trzeba się oswoić. Przede wszystkim jednak należy nauczyć się odpowiednio odczytywać nowy sposób

Nieumiejętne odczytanie wyników matury w konkretnej szkole, mieście czy w województwie może dać bardzo niesprawiedliwą ocenę sprawności edukacyjnej uczniów.

zapisu. Zwłaszcza ta ostatnia kwestia jest istotna, gdyż niewątpliwie nową formułę przedstawiania wyników wprowadzono po to, aby zawrzeć w skondensowanej postaci informacje na tyle istotne, że warto było zmienić dotychczasowe, powszechnie zrozumiałe zasady.

Do najistotniejszych powodów tych zmian należy z pewnością fakt, że przedstawianie wyników matury z użyciem skali centylowej dostarcza informacji w szerszym aspekcie, niż tylko wskazanie, ile uczniowie uzyskali punktów lub jaki osiągnęli procent możliwych do zdobycia punktów. Aby dostrzec jakościową różnicę we wspomnianych sposobach prezentacji wyników, przeanalizujmy kilka sytuacji z codzienności szkolnej.

Na okresowym sprawdzian z biologii Joanna zdobyła 11 punktów, a Wojciech 15, czyli o 4 punkty więcej. Jaka jest użyteczność takiego porównania? Niewielka. Wiemy jedynie, że Wojciech napisał sprawdzian nieco lepiej, ale:

- czy różnica między wynikami Wojtka i Asi jest duża?
- czy 15 punktów zdobytych przez Wojtka to lepszy wynik niż 12 punktów, które otrzymał za poprzedni sprawdzian?

Ani na pierwsze, ani na drugie pytanie nie można odpowiedzieć jednoznacznie. Jeśli maksymalna liczba punktów za obecny sprawdzian była równa 16, to różnica wyników dwójga uczniów stanowi jej czwartą część, czyli 25%. Ale gdyby można było zdobyć za ten sprawdzian 40 punktów, to ta różnica stanowiłaby tylko 10% maksymalnego wyniku.

Podobnie jest z drugim pytaniem. Jeśli obecnie Wojtek zdobył 15 punktów na 30 możliwych, to z pewnością jest to słabszy wynik, niż 12 punktów zdobytych na 14 możliwych w poprzednim sprawdzianie. Widoczna jest tu istota problemu

z porównywaniem wyników. Otóż niewiele jesteśmy w stanie stwierdzić, gdy nie mamy solidnego punktu odniesienia, wzorca albo skali. Dlatego coraz częściej podaje się wyniki procentowe, bo wówczas – uwalniając się od konkretnej liczby punktów – wskazujemy miejsce na pewnej uniwersalnej skali.

Maturzyści otrzymują na świadectwach następującą informację: „Wojciech J. – geografia – poziom podstawowy 67% pkt”, co oznacza, że zdający zdobył $\frac{2}{3}$ wszystkich możliwych do zdobycia punktów. Wiadomo zatem, że na danym egzaminie okazał się lepszy od Jurka, którego wynik sięgnął 55%. Załóżmy jednak, że rok wcześniej Kasia, zdająca maturę na poziomie podstawowym, otrzymała wynik procentowy 60%. Czy to oznacza, że wiedza Kasi z tego przedmiotu jest mniejsza od wiedzy Wojtka, ale większa od wiedzy Jurka? Niekoniecznie, bo przecież bierzemy pod uwagę dwa różne egzaminy, o różnym poziomie trudności. Mimo najwyższej staranności, z jaką CKE przygotowuje arkusze egzaminacyjne, ich poziom nie jest identyczny. Egzamin sprzed roku mógł być nieco łatwiejszy niż obecny, więc ryzykowne byłoby stwierdzenie, że wynik Kasi sprzed roku (60%) jest lepszy niż tegoroczny wynik Jurka (55%). Czy jest zatem jakiś sposób, aby porównać wyniki konkretnej osoby z dwóch różnych egzaminów? Okazuje się, że tak. Aby przybliżyć jego istotę, rozpatrzmy kolejny przykład.

Grupa 250 licealistów napisała sprawdzian, za który można było otrzymać od 0 do 30 punktów. Rozkład punktów przedstawia wykres 1.

Przyjmijmy, że Jurek zdobył 11 punktów, a Asia 22 punkty. Wyrażmy te informacje w procentach:

$$\text{Jurek: } \left(\frac{11}{30} \cdot 100 \right) \% \approx 37\%,$$

$$\text{Asia: } \left(\frac{22}{30} \cdot 100 \right) \% \approx 73\%.$$

Wartości procentów zaokrąglono do liczby całkowitej.

Zarówno wyniki punktowe, jak i procentowe wskazują, że Asia osiągnęła dwukrotnie lepszy rezultat niż Jurek. Tak można to odczytać, jeśli punktem odniesienia jest maksymalny wynik. Ale przecież już pobieżne spojrzenie na rozkład wyników pokazuje, że 11 punktów Jurka to słaby wynik, który osiągnęło stosunkowo mało osób, natomiast 22 punkty zdobyte przez Asię to całkiem dobry rezultat, gdyż niezbyt wiele osób uzyskało ich więcej. Jeszcze bardziej jest to widoczne, gdy te same dane przedstawimy rosnąco (wykres 2, s. 27).

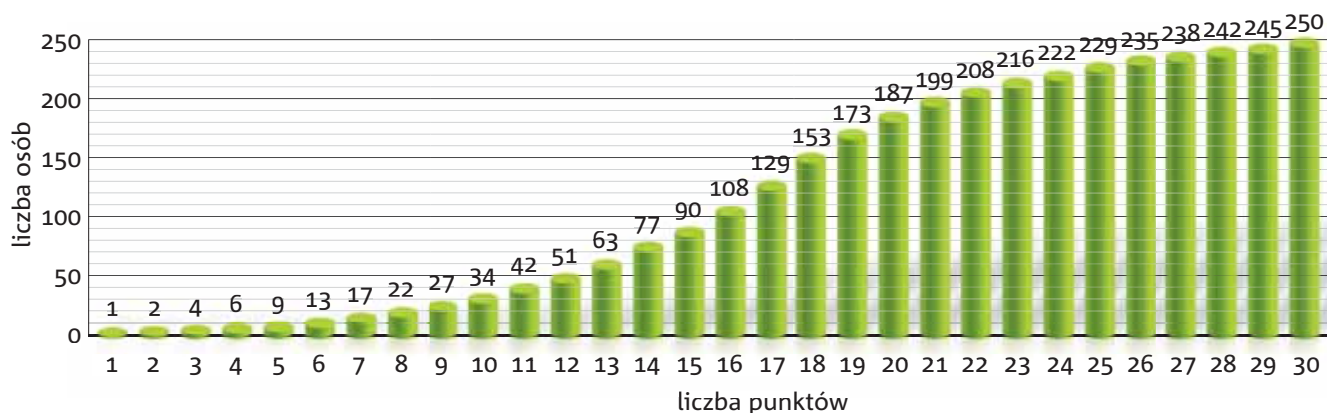
Słupek przypisany 11 punktom informuje, ile osób osiągnęło taki sam lub słabszy rezultat. Są 42 takie osoby i stanowią one 17% wszystkich piszących ten sprawdzian.

$$\left(\frac{42}{250} \cdot 100 \right) \% \approx 17\%$$

Wykres 1. Rozkład wyników sprawdzianu



Wykres 2. Rozkład wyników sprawdzianu – dane skumulowane



Natomiast Asia ze swoim wynikiem ułokowała się w grupie 208 osób, które zdobyły 22 punkty lub mniej. Ci uczniowie stanowią 83% piszących.

$$\left(\frac{208}{250} \cdot 100\right) \% \approx 83\%$$

Jest to około pięciokrotnie liczniejsza grupa, niż ta, w której plasuje się wynik Jurka. Jak widać, tu punktem odniesienia nie jest maksymalny wynik, jaki można było uzyskać za sprawdzian, ale wyniki uzyskane przez całą grupę. Daje to inne, szersze możliwości wnioskowania. Możemy bowiem wyobrazić sobie ranking i miejsca przypisane Jurkowi oraz Asi. Przy takim porównywaniu wyników znacznie mniejsze znaczenie ma poziom trudności testu, a na pierwszy plan wysuwają się różnice między wiedzą poszczególnych zdających. I tu właśnie przydają się centyle.

Centyl jest miarą statystyczną określającą położenie wyniku względem całej grupy wyników. Skalę centylową tworzy się, dzieląc wszystkie wyniki na 100 równych części. Wynik Jurka mieści się zatem w 17. centylu, bo 17% piszących osiągnęło taki sam lub gorszy rezultat. Wynik Asi lokuje się w 83. centylu, gdyż 83% zdających osiągnęło taki sam lub słabszy rezultat.

Takie ujęcie pozwala także porównywać wyniki między różnymi testami, np. między

Należy podkreślić, że centyle wnoszą nowy rodzaj informacji, ale nieumiejętne ich odczytanie może prowadzić do błędnych wniosków.

egzaminami maturalnymi z kolejnych lat. Tę nową możliwość dostrzegły i wykorzystały najwyższe organy zajmujące się diagnozą i polityką oświatową, czyli Ministerstwo Edukacji Narodowej oraz Centralna Komisja Egzaminacyjna – i to najprawdopodobniej stało się przyczyną wprowadzenia opisywanych zmian.

Jak zauważyliśmy, interpretacje wskaźnika procentowego i centylowego mogą się znacznie różnić. Z jednej strony Asia zdobyła niewiele ponad $\frac{2}{3}$ punktów, a z drugiej – tylko kilkanaście procent uczniów piszących ten sam sprawdzian było lepszych od niej. Jaki jest więc wynik Asi? Dobry czy nie najlepszy? Na to pytanie nie ma jednoznacznej odpowiedzi i z pewnością właśnie dlatego oba wspomniane parametry pojawiają się na świadectwach maturalnych, pozostawiając interpretację i ostateczną ocenę uczniowi oraz jego nauczycielom i rodzicom.

Należy podkreślić, że centyle wnoszą nowy rodzaj informacji, ale nieumiejętne ich odczytanie może prowadzić do błędnych wniosków. To, że Wojtek jest w 91. centylu, a Kasia w 30. nie oznacza wcale, że Wojtek napisał sprawdzian trzykrotnie lepiej niż Kasia. Wyniki punktowe

lub procentowe mówią już bowiem coś innego. Kolejnym parametrem statystycznym, który jest wykorzystywany w analizie wyników matury, są staniny. Jak się je określa? Po uporządkowaniu rosnąco wszystkich wyników dzieli się je na dziewięć przedziałów, tzw. staninów, których liczebność jest określona wskaźnikiem procentowym podanym w ostatniej kolumnie tabeli 1.

Centralna Komisja Egzaminacyjna, modyfikując nieco nazewnictwo, właśnie za pomocą staninów przekazała informację o maturze 2013, publikując tabele wyników z poszczególnych przedmiotów w skali staninowej (http://cke.edu.pl/files/file/staniny_2013_nowe.pdf). Spójrzmy na fragment dotyczący matury z matematyki na poziomach podstawowym (Tab. 2) oraz rozszerzonym (Tab. 3, s. 29).

Zwróćmy uwagę, że poszczególne klasy (staniny) są wyznaczone przez inne wyniki na poziomie podstawowym, a inne na poziomie rozszerzonym. Dokładniej mówiąc – te pierwsze, wyznaczając daną klasę, są najczęściej niższe

Tabela 1. Przedziały skali staninowej stosowanej w pomiarze dydaktycznym

Stanin	Nazwa	Procent badanej populacji
1	najniższy	4
2	bardzo niski	7
3	niski	12
4	niżej średni	17
5	średni	20
6	wyżej średni	17
7	wysoki	12
8	bardzo wysoki	7
9	najwyższy	4

od wyznaczających tę samą klasę w drugim zestawieniu. Aby znaleźć się w szóstym staninie (powyżej średniej), trzeba było osiągnąć na poziomie podstawowym 61%. Maturzysta z tym wynikiem był lepszy od 60% zdających. Tymczasem taki wynik procentowy na poziomie rozszerzonym lokuje maturzystę w piątym staninie, czyli w średnim przedziale wyników, i informuje, że jest on lepszy od 40% osób piszących ten

Tabela 2. Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym z maja 2013 roku

Matematyka na poziomie podstawowym (egzamin zdawały 358 153 osoby)				
Podział wyników na dziewięć klas	Klasa	Nazwa klasy	Wyniki na świadectwie	Komentarz dla zdającego (informację o procentach podano w przybliżeniu)
	1	najniższa	0%–12%	4% zdających ma wynik w tej klasie, 96% zdających ma wynik w wyższych klasach
	2	bardzo niska	13%–18%	7% zdających ma wynik w tej klasie, 89% zdających ma wynik w wyższych klasach, 4% w niższej
	3	niska	19%–28%	12% zdających ma wynik w tej klasie, 77% zdających ma wynik w wyższych klasach, 11% w niższych
	4	poniżej średniej	29%–44%	17% zdających ma wynik w tej klasie, 60% zdających ma wynik w wyższych klasach, 23% w niższych
	5	średnia	45%–60%	20% zdających ma wynik w tej klasie, 40% zdających ma wynik w wyższych klasach, 40% w niższych
	6	powyżej średniej	61%–78%	17% zdających ma wynik w tej klasie, 23% zdających ma wynik w wyższych klasach, 60% w niższych
	7	wysoka	79%–90%	12% zdających ma wynik w tej klasie, 11% zdających ma wynik w wyższych klasach, 77% w niższych
	8	bardzo wysoka	91%–96%	7% zdających ma wynik w tej klasie, 4% zdających ma wynik w wyższych klasach, 89% w niższych
	9	najwyższa	97%–100%	4% zdających ma wynik w tej klasie, 96% w niższych

Tabela 3. Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym z maja 2013 roku

Matematyka na poziomie rozszerzonym (egzamin zdawały 58 383 osoby)				
Podział wyników na dziewięć klas	Klasa	Nazwa klasy	Wyniki na świadectwie	Komentarz dla zdającego (informację o procentach podano w przybliżeniu)
	1	najniższa	0%–4%	4% zdających ma wynik w tej klasie, 96% zdających ma wynik w wyższych klasach
	2	bardzo niska	5%–14%	7% zdających ma wynik w tej klasie, 89% zdających ma wynik w wyższych klasach, 4% w niższej
	3	niska	15%–30%	12% zdających ma wynik w tej klasie, 77% zdających ma wynik w wyższych klasach, 11% w niższych
	4	poniżej średniej	31%–48%	17% zdających ma wynik w tej klasie, 60% zdających ma wynik w wyższych klasach, 23% w niższych
	5	średnia	49%–62%	20% zdających ma wynik w tej klasie, 40% zdających ma wynik w wyższych klasach, 40% w niższych
	6	powyżej średniej	63%–74%	17% zdających ma wynik w tej klasie, 23% zdających ma wynik w wyższych klasach, 60% w niższych
	7	wysoka	75%–86%	12% zdających ma wynik w tej klasie, 11% zdających ma wynik w wyższych klasach, 77% w niższych
	8	bardzo wysoka	87%–92%	7% zdających ma wynik w tej klasie, 4% zdających ma wynik w wyższych klasach, 89% w niższych
	9	najwyższa	93%–100%	4% zdających ma wynik w tej klasie, 96% w niższych

Źródło: Rozkład staninowy wyników egzaminacyjnych z przedmiotu matematyka, www.cke.edu.pl

egzamin. Wynika z tego, że egzamin na poziomie podstawowym był trudniejszy niż na poziomie rozszerzonym, gdyż nastąpiło zagęszczenie w niższych staninach, a do wysokich trafiły osoby z niezbyt wygórowanymi osiągnięciami (aby osiągnąć wysoki stanin, wystarczyło 79%).

Staniny pokazują poziom umiejętności ucznia na tle pozostałych zdających, natomiast nie określają precyzyjnie jego umiejętności. Wynik z trudnego testu, mieszczący się w szóstym staninie, może oznaczać tak naprawdę wyższy poziom umiejętności niż wynik osoby piszącej łatwy test, mieszczący się w ósmym staninie, badający te same umiejętności. Staniny nie odpowiadają na pytanie o to, w jakim stopniu zrealizowano wymagania podstawy programowej. Pokazują jedynie miejsce, jakie zajął wynik ucznia na tle wszystkich wyników egzaminu.

Podsumowując krótko ten przegląd narzędzi statystycznych stosowanych w diagnozach edukacyjnych, chciałbym jeszcze raz zwrócić

Staniny nie odpowiadają na pytanie o to, w jakim stopniu zrealizowano wymagania podstawy programowej. Pokazują jedynie miejsce, jakie zajął wynik ucznia na tle wszystkich wyników egzaminu.

uwagę na konieczność ostrożnego formułowania ocen i wyciągania wniosków. Narzędzia statystyczne mogą dostarczyć bardzo konkretnej, selektywnej wiedzy, jeśli się ich umiejętnie używa. Z pewnością warto więc z nich korzystać, dbając jednak przy tym o rzetelność i mając pełną świadomość zarówno ich możliwości, jak i niedostatków.

Jerzy Janowicz

Nauczyciel matematyki, autor podręczników, książek pomocniczych oraz programów do nauczania matematyki.





SHUTTERSTOCK/EDYTA PAWŁOWSKA

Co zdaje egzamin? Strategie przygotowań maturalnych

W każdej klasie można wskazać uczniów, którzy są zawsze przygotowani oraz tych, którzy odkładają przygotowania do matury na ostatnią chwilę. Zarówno jedni, jak i drudzy wierzą w swój sukces na egzaminie.

W roku szkolnym 2012/2013 zostały przeprowadzone trwające 5 miesięcy badania i obserwacje, mające na celu poznanie sposobów przygotowań uczniów do egzaminu maturalnego. Brali w nich udział uczniowie osiągający różne wyniki w nauce. Dzięki nim udało się wyróżnić grupy odznaczające się różnymi postawami wobec nauki oraz stylami uczenia się, poznano ich potrzeby oraz zdefiniowano problemy wynikające z poszczególnych sposobów przygotowań maturalnych.

Zdobyta w trakcie badań wiedza pozwala stworzyć ofertę materiałów wspierających przygotowania w pełni dopasowaną do potrzeb uczniów i nauczycieli. Z obserwacji wynika, że przyszłych maturzystów cechują zwłaszcza:

- duża świadomość celów podczas przygotowań,
- pragmatyzm w planowaniu przygotowań,
- nastawienie na kształcenie wymaganych na maturze umiejętności,
- różnicowanie podejścia do przygotowań z różnych przedmiotów.

Świadome przygotowania. Obecnie maturzyści często podchodzą do egzaminu dojrzałości, wiedząc dokładnie, jaki wynik chcą uzyskać z poszczególnych przedmiotów. Zazwyczaj wiedzą, z jakich przedmiotów i na jakim poziomie muszą zdać maturę, aby dostać się na planowane studia. Część z nich z góry wybiera uczelnię, na które próg dostania się jest zgodny z wynikiem, jaki uważają za możliwy do osiągnięcia. To powoduje, że uczą się głównie materiału, który będzie im potrzebny do uzyskania założonego wyniku. Od pomocy maturalnych, czyli publikacji, które wspierają przygotowania do egzaminu, oczekują więc przede wszystkim łatwej nawigacji, przejrzystości i elastyczności, aby mogli powtarzać i ćwiczyć te partie materiału, na których im szczególnie zależy.

Pragmatyzm. Przygotowując się do matury, uczniowie starają się skoncentrować przede wszystkim na pracy z zadaniami typu maturalnego, aby oswoić się z ich formą. Jest

to dla nich równie ważne, jak zdobycie wiedzy z poszczególnych przedmiotów. Dlatego poszukują materiałów ściśle bazujących na treściach i formach zadań maturalnych.

Nastawienie na umiejętności. Większość uczniów – często dzięki wysiłkom nauczycieli – zdaje sobie sprawę z dużego znaczenia, jakie ma posiadana wiedza. Jednak mają też świadomość, że samo przyswajanie wiedzy bez ćwiczenia maturalnych typów zadań nie zapewni im sukcesu. Z tego powodu poszukują publikacji, które będą umożliwiały zarówno powtarzanie i porządkowanie wiedzy, jak i ćwiczenie umiejętności jej stosowania w praktyce, czyli pokażą krok po kroku, jak przejść od przyswojenia wiedzy do jej użycia podczas rozwiązywania zadań.

Zróżnicowane podejście do przedmiotów. Maturzyści znają specyfikę przedmiotów, które decydują się zdawać, oraz swoje mocne i słabe strony. Mają zatem świadomość, który przedmiot wymaga od nich większego, a który mniejszego wysiłku. Dlatego niektóre przedmioty z góry zakładają zdać na niskim poziomie, uważając, że nie mają możliwości przygotowania się do wszystkich egzaminów równie dobrze. Świadomie zarządzają czasem oraz wysiłkiem wkładanym w naukę poszczególnych przedmiotów. Liczba godzin w programie nauczania oraz wysiłki nauczyciela mają przy tym ograniczony wpływ na zachowania uczniów – jeśli uznają, że jakiś przedmiot ma dla nich mniejsze znaczenie, będą ograniczać pracę nad nim do godzin lekcyjnych, jeżeli zaś przedmiot jest dla nich ważny, będą uczyć się go znacznie intensywniej.

Niezależnie od różnic w postawach uczniów związanych z przygotowywaniem się do egzaminu maturalnego można wyróżnić trzy główne grupy ze względu na styl tych przygotowań. Są to uczniowie *zawsze przygotowani*, *unikający stresu* oraz *zawsze na ostatnią chwilę*. Te style uczenia się nie są silnie powiązane z poziomem zdolności uczniów – zarówno uczniowie mniej, jak i bardziej zdolni pojawiają się w każdej z grup. Często wiążą się natomiast z postawą wobec przedmiotu.

W skrócie



- **Zróżnicowanie postaw uczniów wobec nauki oraz celów i stylów uczenia się.**

Przedmioty postrzegane jako trudne, a zarazem ważne dla wyniku maturalnego, wymagają od uczniów systematyczniejszej pracy. Natomiast w wypadku przedmiotów uważanych za łatwe lub mało znaczące uczniowie pozwalają sobie na znacznie późniejsze rozpoczęcie przygotowań maturalnych.

Zawsze przygotowani. To grupa uczniów, którzy rozpoczynają przygotowania najwcześniej, czyli już podczas wakacji albo we wrześniu. Od pierwszych dni września trzeciej klasy wdrażają systematyczny plan nauki, jednak ich przygotowania maturalne trwają de facto od początku nauki na poziomie ponadgimnazjalnym. Zazwyczaj plan ten jest niezależny od rytmu przygotowań szkolnych, w którym także biorą udział, często wyprzedzając tempo. Starają się poszerzać przerabiany materiał i stawiać sobie wyzwania. **Na początku roku szkolnego poszukują dodatkowych materiałów i opracowań, z których później systematycznie korzystają.** Duża część uczniów z tej grupy planuje studia na najbardziej popularnych kierunkach, takich jak medycyna lub architektura, toteż bez wahania sięgają po podręczniki akademickie lub opracowania popularnonaukowe. Praca nauczyciela z tymi uczniami może być bardziej wymagająca o tyle, że potrzebują oni zadań o wyższym poziomie trudności, większej ilości dodatkowych materiałów oraz wsparcia w ich samodzielnym poszukiwaniu. Typowe repetytoria, zbudowane jako zbiory skondensowanej wiedzy, są dla nich mało przydatne. Sięgają po nie najmniej zdolni z tej grupy. Pozostali znacznie chętniej pracują z materiałami bardziej rozbudowanymi, stymulującymi myślenie oraz pomagającymi przenosić posiadaną wiedzę na prawidłowe rozwiązywanie trudnych zadań maturalnych.

Unikający stresu. Grupa o przeciętnej motywacji do nauki, ale nastawiona na unikanie negatywnych emocji. Uczniowie z tej grupy poszukują materiałów wspomagających przygotowania do egzaminu na początku roku szkolnego, często pytają o nie nauczycieli, ale w ich

Praca nauczyciela z uczniami zawsze przygotowanymi może być bardziej wymagająca o tyle, że potrzebują oni zadań o wyższym poziomie trudności, większej ilości dodatkowych materiałów oraz wsparcia w ich samodzielnym poszukiwaniu.

wypadku sam fakt dokonania zakupu pozwala rozładować stres, przez co nawet nie zaczynają z tych pomocy korzystać. Podobnie z zajęciami dodatkowymi organizowanymi przez szkołę – zapisują się na nie, ale nie biorą w nich systematycznego udziału. Punktem zwrotnym w ich wypadku jest zazwyczaj koniec pierwszego semestru. Rozpoczynają wówczas przygotowania, koncentrując się na tym, co na pewno będzie na maturze. Są zatem pragmatyczni, wybierają materiały przejrzyste, dobrze uporządkowane, podobne pod względem struktury i formy do podręczników, z którymi pracowali w ostatnich latach, bo z takich łatwiej im się uczyć. W przygotowaniach skupiają się na zadaniach maturalnych, które rozwiązują, poszukując wiedzy w repetytoriach (ze względu na ich przejrzystość), podręcznikach oraz we własnych notatkach. Szczególnie ważne są dla nich syntetyczne materiały wspomagające, od których oczekują nie tylko skrótu wiedzy, ale także tłumaczenia trudniejszych zagadnień oraz wskazówek, jak wykorzystać wiedzę do prawidłowego rozwiązywania zadań. Z tego powodu tradycyjne repetytoria uzupełniają arkuszami maturalnymi, poszukując publikacji, w których funkcje powtórzeniowe i ćwiczeniowe są ściśle zintegrowane.

Uczniowie unikający stresu w przygotowaniach skupiają się na zadaniach maturalnych, które rozwiązują, poszukując wiedzy w repetytoriach (ze względu na ich przejrzystość), podręcznikach oraz we własnych notatkach.

Podstawowym oczekiwaniem uczniów z grupy *zawsze na ostatnią chwilę* jest prostota i zwięzłość materiałów wspomagających oraz ich koncentracja na minimalnym poziomie wymagań.

Zawsze na ostatnią chwilę. Uczniowie o takim profilu przygotowań to zarówno osoby bardzo zdolne, jak i uczniowie najslabsi. Ich wspólną cechą jest niska motywacja do uczenia się danego przedmiotu, a w wypadku mniej zdolnych – często do uczenia się w ogóle, co wynika z wcześniejszych porażek. Uczący się na ostatnią chwilę rozpoczynają przygotowania nawet w połowie drugiego semestru. Ich celem jest zdanie matury na minimalnym poziomie, często są zainteresowani tylko przedmiotami obowiązkowymi, w których występuje próg punktowy. Wielu z nich ma jednak plany związane ze zdaniem matury, dlatego zależy im, aby nie zmarnować wysiłku włożonego nawet w krótkie przygotowania. Podstawowym oczekiwaniem tej grupy jest prostota i zwięzłość materiałów wspomagających oraz ich koncentracja na minimalnym poziomie wymagań. Raczej odrzucają tradycyjne repetytoria, które wydają im się zbyt trudne. Nieatrakcyjne są dla nich również standardowe arkusze maturalne, w których znajdują się pytania o różnym poziomie trudności, w tym takie, z którymi uczniowie sobie nie radzą, zwłaszcza we wczesnym etapie przygotowań. Takie materiały wymagają od nich poświęcenia zbyt długiego czasu na tematy i problemy, których świadomie nie zamierzają się uczyć, ponieważ nie są konieczne do zdania matury.

Wyniki badań wskazują także na znaczne różnice w **sposobach przygotowywania się do matury z poszczególnych przedmiotów**. Wynika to z typowych sposobów uczenia się tych przedmiotów oraz ich specyfiki. Na podstawie analizy sposobów przygotowań można wyróżnić cztery grupy przedmiotów:

- przedmioty ograniczone do przygotowań szkolnych,

- przedmioty wymagające czasochłonnej nauki pamięciowej,
- przedmioty wymagające czasochłonnych ćwiczeń,
- przedmioty, do których przygotowania bazują na mało obciążającej nauce pamięciowej.

Przedmiot ograniczony do przygotowań szkolnych – język polski. Zdaniem większości maturzystów liczba godzin lekcyjnych z tego przedmiotu pozwala na wystarczające przygotowanie się do matury. Wyjątek stanowią osoby planujące studia lingwistyczne, dla których wysoki wynik maturalny z języka polskiego ma duże znaczenie, dlatego poza obowiązkowymi zajęciami doskonalą pisanie wypracowań. Dla pozostałych uczniów optymalny materiał powtórzeniowy zawiera najważniejsze treści lekcji w skróconej formie, np. w postaci tabelarycznych zestawień.

Przedmioty wymagające czasochłonnej nauki pamięciowej. Za takie przedmioty uznawane są głównie biologia i historia, a ponadto chemia (konieczna jest wiedza wykorzystywana przy rozwiązywaniu zadań). Uczniowie uważają, że podstawą nauki tych przedmiotów jest systematyczność. Oprócz rozumienia tematów ważne jest zapamiętywanie dużej ilości informacji. Uczniowie *zawsze przygotowani* oraz *unikający stresu* chętnie uczą się tych przedmiotów z materiałów zawierających urozmaicenia – ilustracje, ciekawostki, dodatkowe informacje. Dzięki nim wkładają mniej wysiłku w opanowanie podstawowych treści. Uczący się *na ostatnią chwilę* mają odwrotne oczekiwania – potrzebują materiału skróconego, uproszczonego, okrojonego do niezbędnego minimum. Jednak ci uczniowie bardzo rzadko wybierają przedmioty wymagające czasochłonnej nauki pamięciowej.

Przedmioty wymagające czasochłonnych ćwiczeń. Te przedmioty to w opinii uczniów przede wszystkim matematyka i fizyka, a także chemia. W ich wypadku zasadniczym sposobem przygotowań jest systematyczne rozwiązywanie zadań o różnej konstrukcji oraz różnym poziomie trudności. Na jakość

przygotowań mają wpływ ilość i różnorodność przerobionych zadań. Uczniowie *zawsze przygotowani* dążą do rozwiązania wszystkich zadań ze wszystkich dostępnych im źródeł. Uczniowie *unikający stresu* starają się ograniczać do zadań maturalnych. Publikacja przeznaczona dla nich musi zawierać wszystkie typy takich zadań wraz ze wskazówkami, jak użyć posiadanej wiedzy do ich rozwiązania. Uczniowie przygotowujący się *na ostatnią chwilę* poszukują publikacji lub materiałów zawierających tylko podstawowe typy zadań na niskim oraz umiarkowanym poziomie trudności.

Przedmioty bazujące na nauce pamięciowej to geografia i WOS. Uczniowie wybierający te przedmioty to przede wszystkim *unikający stresu* oraz *uczący się na ostatnią chwilę*. *Zawsze przygotowani* raczej ich nie wybierają, ponieważ żaden z nich nie daje dużej przewagi podczas rekrutacji na studia. Wyjątkiem w wypadku WOS są uczniowie zdający na dziennikarstwo lub kierunki społeczne, a w wypadku geografii – na geografię i kierunki pokrewne. Ci uczniowie zazwyczaj mają jednak dużą orientację w przedmiocie jeszcze przed rozpoczęciem przygotowań i korzystają z zaawansowanych źródeł wiedzy. Jak wskazują obserwowane preferencje – materiały wspierające przygotowania z tych przedmiotów dla pozostałych uczniów powinny być przede wszystkim łatwe w odbiorze, czyli bogate graficznie, wzbogacone ciekawostkami i nieprzeładowane informacjami. Ich głównym zadaniem jest ułatwienie i uprzyjemnienie nauki, a zarazem dostarczenie materiału do opanowania wiedzy na poziomie wystarczającym do zdania egzaminów.

Zróżnicowane style pracy oraz postawy wobec nauki przedmiotów powodują, że opracowanie właściwej oferty materiałów wspomagających nie jest łatwe. Każdy przedmiot wymaga indywidualnego podejścia oraz nieco innej konstrukcji materiałów wspierających przygotowania.

Zróżnicowane style pracy oraz postawy wobec nauki przedmiotów powodują, że opracowanie właściwej oferty materiałów wspomagających nie jest łatwe. Nie ma jednego schematu nauki dla wszystkich przedmiotów, nie ma także uniwersalnego kursu przedmiotu dla wszystkich uczniów. Każdy przedmiot wymaga indywidualnego podejścia oraz nieco innej konstrukcji materiałów wspierających przygotowania.

Matematyka

Stosunkowo duża liczba godzin matematyki nie zaspokaja wszystkich potrzeb wynikających z obszerności materiału i konieczności systematycznego powtarzania. Egzamin maturalny z tego przedmiotu jest uznawany przez wszystkich uczniów za ważny i trudny. Podstawą przygotowań z matematyki jest systematyczne powtarzanie schematów zadań maturalnych poprzez rozwiązywanie dużej ich liczby. Uczniowie przeciętni potrzebują wielu zadań o zbliżonym poziomie trudności, ponieważ przyswajają schematy działania stosunkowo wolno. W ich wypadku najlepiej sprawdzają się zbiory zadań maturalnych ułożone według działów, ale z zachowaniem stopniowania trudności. Powtarzanie często zaczyna się od przyswojenia materiału, zatem wstępy do działów powinny mieć cechy repetytorium. Dla uczniów zdolnych optymalnym rozwiązaniem są zbiory przykładowych arkuszy maturalnych, w których spotykają zadania zróżnicowane pod względem zakresu tematycznego oraz poziomu trudności. To pomaga im uzyskać kontrolę nad własną wiedzą oraz umiejętnościami.

Michał Kociankowski

Dyrektor pracowni badawczej SYNERGION, członek Zarządu Polskiego Towarzystwa Badaczy Rynku i Opinii.





MACIEJ WRÓBEL

Geometria na maturze – twardy orzech do zgryzienia

Zadania z geometrii sprawiają uczniom wiele trudności. Warto zadbać o to, aby na maturze w roku szkolnym 2014/2015 uczniowie umieli sobie z nimi poradzić.

Zdaję sobie sprawę, że nauczanie geometrii nie jest łatwe. Wielu uczniów słabo sobie radzi z rozwiązywaniem tego typu zadań. Potrzebne są umiejętności: **wnioskowania, kojarzenia faktów, poprawnego rysowania, właściwego komentowania swojego rozumowania** itd. Nie eksponowałbym znaczenia znajomości wzorów, których pełny zestaw i tak dołącza się do zadań maturalnych. Szczególny nacisk należy położyć właśnie na kształtowanie wyżej wymienionych umiejętności.

Nasze powodzenie w tym zakresie w ogromnej mierze zależy od kompetencji intelektualnych uczniów wyniesionych z domu i wcześniejszych etapów edukacji szkolnej. Przyswojenie przez ucznia nowego wzoru to kwestia chwili; nad resztą trzeba długo pracować. Najważniejsze w tym procesie jest umożliwienie uczniom wielokrotnego stosowania zdobytej wiedzy i umiejętności. Trzeba im podsuwać odpowiednią liczbę zadań. Tylko ćwiczenie pozwoli utrwalić i udoskonalić

to, czego się nauczyli. Zadania nie powinny jednak mieć charakteru obliczeniowego – takie są mniej kształtujące.

Podstawowe umiejętności należy kształtować na przykładach i zadaniach łatwych i nieskomplikowanych. Rozwiązanie kilkunastu prostych zadań ma większy walor dydaktyczny, niż rozwiązanie jednego czy dwóch zadań trudnych, prowadzi bowiem do głębszego i pełniejszego zrozumienia zagadnienia. Da uczniom poczucie pewności, pozwoli im samodzielnie kontrolować swoje postępy, choćby w zakresie komentowania rozwiązań czy sporządzania rysunków. W konsekwencji wyeliminuje strach przed geometrią.

Największym problemem jest brak czasu na lekcji. Zadania z geometrii wymagają komfortu czasowego. Ponadto w przypadku zadań geometrycznych trudniej kontrolować pracę uczniów, co rodzi pokusę stosowania zadań obliczeniowych.

W ramach współpracy z wydawnictwem Nowa Era miałem niedawno okazję do

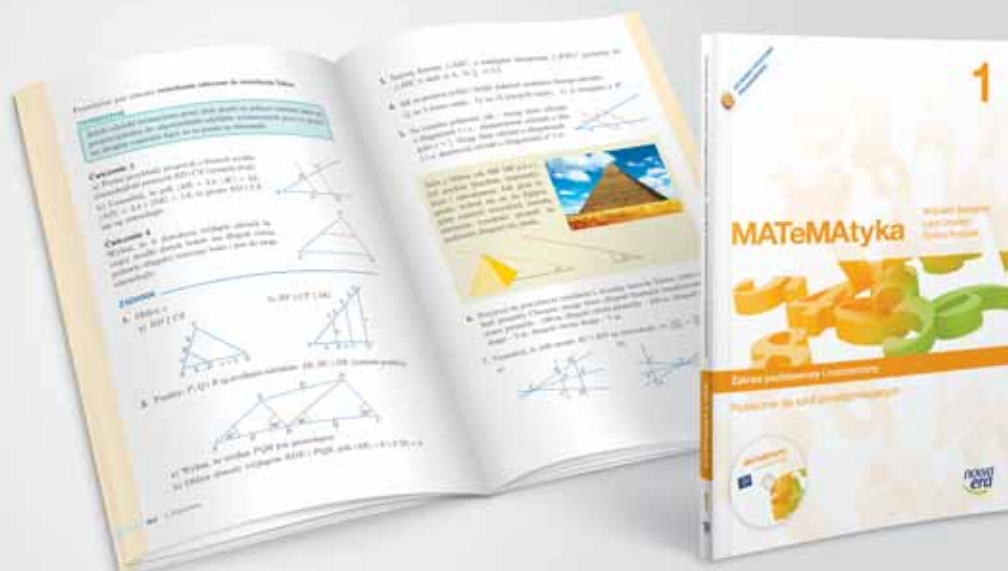
W skrócie

- Kilka rad, jak uczyć geometrii.



PRZEJRZyste RYSUNKI

Ułatwiają zrozumienie trudnych do przyswojenia zależności matematycznych, zwłaszcza w zadaniach z geometrii.



Podręcznik *MATeMATyka 1*, zakres podstawowy i rozszerzony, s. 262–263.

odbycia kilku spotkań. W każdym z nich uczestniczyło około pięćdziesięciu nauczycieli matematyki z różnych szkół i miejscowości. Był to zatem dość szeroki przekrój środowiska.

Zaproponowałem temat: „Okrąg Eulera jako podstawowe narzędzie w nauczaniu geometrii elementarnej”... i już sam ten temat wzbudził spore emocje. Wielu nauczycieli zaczęło skarżyć się na swoich uczniów – że są słabi, mało zainteresowani matematyką, mają kłopoty z przyswojeniem prostych pojęć itd. Stwierdzili, że ja miałem szczęście pracować z młodzieżą szczególnie zdolną, o ambicjach olimpijskich. Wyrażali przekonanie, że w pracy z takimi uczniami łatwiej o efekty dydaktyczne i sukcesy. Zapytałem więc, jakie tematy oni chcieliby omawiać na zajęciach ze swoimi uczniami i czy znają termin *okrąg Eulera*.

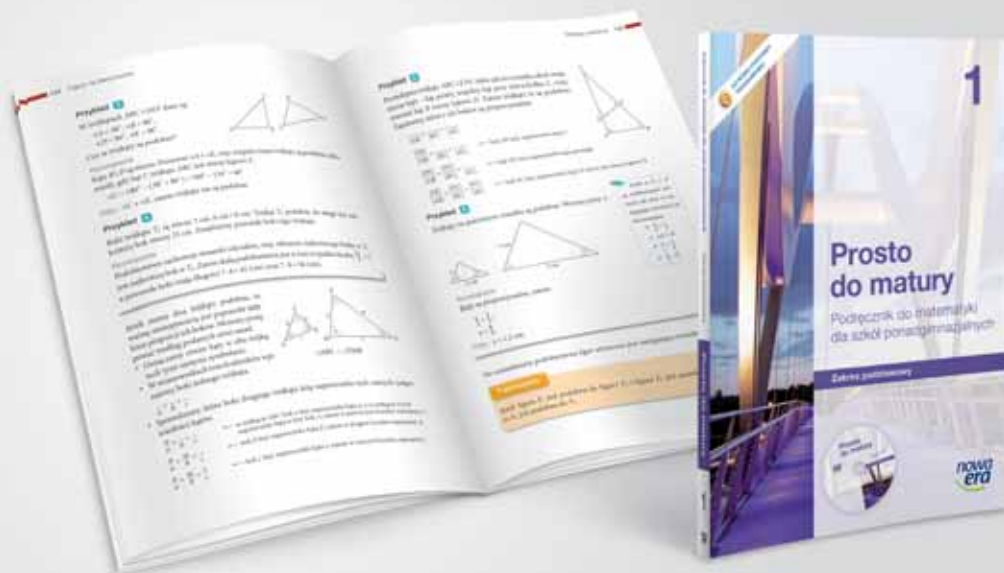
Proponując ten temat, nie zamierzałem popisywać się oryginalnością ani wydumanyymi zastosowaniami twierdzeń czy pojęć, a ze wspomnianym terminem sam zapoznałem się

Rozwiązanie kilkunastu prostych zadań geometrycznych ma większy walor dydaktyczny, niż rozwiązanie jednego czy dwóch zadań trudnych, prowadzi bowiem do głębszego i pełniejszego zrozumienia zagadnienia.

dopiero po kilkunastu latach pracy, już jako doświadczony nauczyciel. Moim zamiarem było natomiast przekazanie pewnego przesłania. Otóż uważam, że nie możemy pozwolić na odebranie nam pewności, że to my, nauczyciele, stoimy za sukcesami naszych uczniów, ale jednocześnie nie wolno nam niczego usprawiedliwiać niedoskonałością uczniów – ponieważ wiedzą oni na ogół tylko tyle, ile im przekazemy. Nie sądźmy więc, że uczniowie są słabi czy nieprzygotowani; rozwijajmy się i dzielmy z uczniami tym wszystkim, czego sami się nauczymy. Nasz samorozwój i dbanie o rozwój uczniów będą najlepszą gwarancją osiągania

SZCZEGÓŁOWE ROZWIĄZANIA TRUDNYCH ZADAŃ

Szczegółowo omówione rozwiązania przykładowych zadań dotyczących zagadnień sprawiających uczniom najwięcej problemów umożliwiające szybkie opanowanie nowych i trudnych treści, np. z zakresu geometrii.



Podręcznik *Prosto do matury 1*, zakres podstawowy, s. 134–135.

Nauczanie geometrii nie jest łatwe. Bardzo wielu uczniów słabo sobie radzi z rozwiązywaniem zadań geometrycznych. Potrzebne są umiejętności: wnioskowania, kojarzenia faktów, poprawnego rysowania. Okrąg Eulera jest chyba najlepszym „poligonem” do wyćwiczenia przez uczniów koniecznych umiejętności.

przez naszych uczniów sukcesów nie tylko olimpijskich, ale także maturalnych.

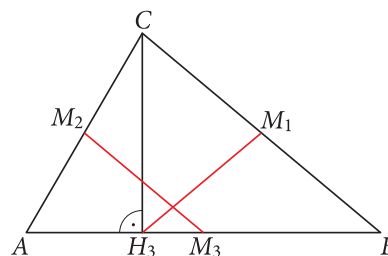
Nie ulegajmy jednak upowszechniającemu się pogładowi, że powinnością nauczycieli jest głównie przygotowanie uczniów do matury czy do egzaminów na studia. Moim zdaniem naszą powinnością jest rzetelne nauczanie matematyki. Do wszelkiego typu sprawdzianów, łącznie z egzaminem maturalnym, uczniowie muszą przygotować się sami. My, nauczyciele, koncentrujemy się na jak najlepszym, optymalnym nauczaniu. Rozwijamy u uczniów potrzebne im kompetencje, nie uczymy sztamowego myślenia, pokazujemy ważne i ciekawe zastosowania zdobywanej przez nich wiedzy.

W kontekście tych rozważań chciałem wyrazić przekonanie, że okrąg Eulera jest chyba najlepszym „poligonem” do wyćwiczenia przez uczniów koniecznych umiejętności. Im wcześniej spróbujemy przekonać ich do geometrii, tym łatwiej będzie im osiągnąć oczekiwane sukcesy, także na maturze.

Podam przykłady kilku zadań, od których w dowolnym momencie można zacząć „przygodę z geometrią”. Przy okazji polecam spontaniczne wprowadzanie nowych pojęć i faktów, które wzbudzą zainteresowanie, a także pomogą rozwinąć zdolności oraz umiejętności uczniów.

Zadanie 1.

Wykaż, że odcinek łączący środki boków AB i AC trójkąta ABC oraz odcinek łączący spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka C ze środkiem boku BC mają taką samą długość.



Rozwiązanie

Aby tego dokonać, wykorzystamy dwa fakty:

- fakt 1. – odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy;
- fakt 2. – środkowa przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym jest od niej dwa razy krótsza.

Wynika z nich, że interesujące nas odcinki równe są połowie boku BC , co kończy dowód.

Podkreślę, że oba fakty są znane uczniom i wykorzystuje się je w wielu zadaniach. Są to jednak na ogół zadania obliczeniowe, ponadto rzadko rozpatruje się te odcinki jednocześnie.

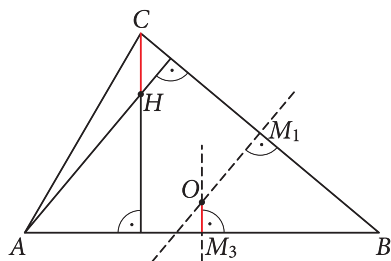
Zauważmy, że treść zadania zmusza ucznia do zastanowienia się, w jaki sposób można porównać długości odcinków bez konkretnych obliczeń. I dopiero w tym momencie zaczyna się najważniejszy proces w nauczaniu, czyli myślenie, kojarzenie faktów, wykorzystywanie

posiadanej wiedzy i odwoływanie się do doświadczeń praktycznych. Nauczyciel powinien być przewodnikiem w tym procesie i dopilnować, aby każdy uczeń brał w nim aktywny udział.

W zadaniu 1. obydwa odcinki porównano z trzecim odcinkiem. Inne metody będą wykorzystane w następnych zadaniach.

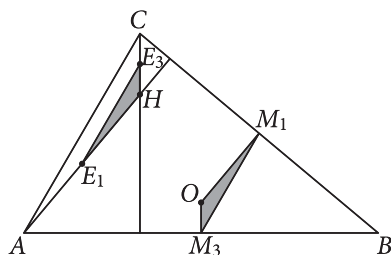
Zadanie 2.

Wykaż, że długość odcinka łączącego wierzchołek trójkąta ABC z ortocentrum jest dwa razy większa niż odległość środka okręgu opisanego na tym trójkącie od boku leżącego naprzeciw tego wierzchołka.



Rozwiązanie

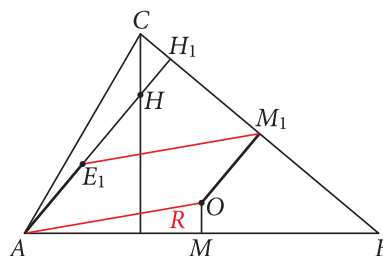
Zauważmy, że te odcinki nie mają wspólnego punktu, co na ogół potęguje uczucie bezradności wobec problemu. Wystarczy jednak zbudować dwa trójkąty przystające z udziałem tych odcinków.



Punkty E_1 i E_3 są środkami odcinków odpowiednio AH i CH , a M_1 i M_3 – środkami boków odpowiednio BC i AB . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Z faktu 1. zastosowanego do trójkątów AHC i ABC wynika, że $|E_1E_3| = |M_3M_1| = \frac{1}{2}|AC|$. Ponadto odpowiednie boki trójkątów E_1HE_3 i M_1OM_3 są równoległe. Wynikają stąd przystawanie tych trójkątów i równość odcinków E_3H i OM_3 . Stąd bezpośrednio otrzymujemy tezę: $|CH| = 2|OM_3|$.

Zadanie 3.

Oznaczmy przez E_1 środek odcinka łączącego wierzchołek A trójkąta ABC z jego ortocentrum H . Punkt M_1 jest środkiem boku BC . Wykaż, że $|E_1M_1| = R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

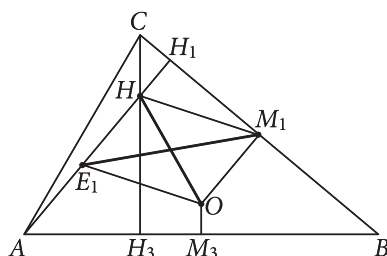


Rozwiązanie

Z zadania 2. wynika, że $|AE_1| = |OM_1|$ i AE_1 jest równoległy do OM_1 . Oznacza to, że figura AOM_1E_1 jest równoległobokiem i $|E_1M_1| = |AO| = R$.

Zadanie 4.

Wykaż, że odcinki E_1M_1 i OH (oznaczenia jak w zadaniu 3.) przecinają się w połowie.

**Rozwiązanie**

Wystarczy dostrzec, że odcinki są przekątnymi równoległoboku E_1OM_1H (odcinki E_1H i OM_1 są równej długości i są równoległe).

Przy okazji warto uświadamiać uczniom, że poprawne merytorycznie, przejrzyste wykonane rysunki są bardzo pomocne w rozwiązywaniu zadań z geometrii.

Zwracam uwagę na fakt, że w każdym zadaniu można rozwiązywać analogiczne przypadki związane z pozostałymi wierzchołkami i środkami boków lub odpowiednich odcinków. Nauczyciel może je zaproponować jako zadania dodatkowe. Zamiast trójkąta ostrokątnego, warto rozważyć trójkąt rozwartokątny. Jest to doskonała okazja do utrwalania umiejętności. Być może nie wszyscy zauważyli to, co wykazaliśmy w ostatnim zadaniu: odpowiednie trzy punkty leżą na okręgu o środku S i promieniu $\frac{1}{2}R$. Analogicznie wykazuje się to samo dla dwóch pozostałych „trójków” punktów (środek boku, spodek wysokości opuszczonej na ten bok i środek odcinka łączącego ortocentrum z przeciwległym wierzchołkiem).

Tak oto dotarliśmy do wspomnianego na początku okręgu Eulera.

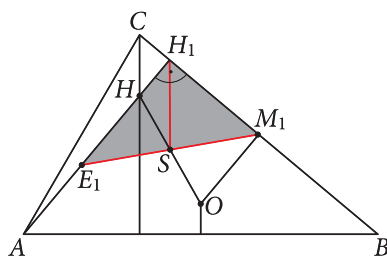
Okrąg Eulera, nazywany także okręgiem dziewięciu punktów, przechodzi przez środki boków trójkąta, spodki jego wysokości i środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum. Środek okręgu Eulera jest środkiem odcinka, którego końcami są środek okręgu opisanego na trójkącie i ortocentrum tego trójkąta. Promień tego okręgu jest natomiast dwa razy krótszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Łatwo zauważyć, że w tym opisie nie pojawiły się pojęcia nieznanne uczniom. W celu oswajania ich z nowym zagadnieniem można zaproponować narysowanie okręgów Eulera dla różnych typów trójkątów.

Wiele zadań, również maturalnych, wiąże się z okręgiem opisanym na czworokącie. Każdy nauczyciel mógłby zaproponować 126 zadań

Zadanie 5.

Niech S oznacza środek odcinka OH . Wykaż, że spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka A , środek odcinka AH i środek boku BC są równo odległe od S .

**Rozwiązanie**

Z dwóch poprzednich zadań wynika, że $|E_1S| = |SM_1| = \frac{1}{2}R$. Rozważmy trójkąt $E_1M_1H_1$. Z faktu 2. z zadania 1. wynika, że $|H_1S| = \frac{1}{2}R$. Stąd teza.

ROZWIĄZANIA KROK PO KROKU

Przykładowe zadania rozwiązane krok po kroku zwiększają przystępność wykładu, co jest istotne szczególnie w zadaniach konstrukcyjnych.



Podręcznik *Prosto do matury 1*, zakres podstawowy, s. 110–111.

(na tyle sposobów można wybrać cztery punkty spośród dziewięciu), w których należy dostrzec, że pewne cztery punkty leżą na okręgu.

Poniżej przykładowe zadanie wykorzystujące oznaczenia z poprzednich rysunków.

Zadanie 6.

Wykaż, że punkty M_1 , M_2 , H_1 , H_3 leżą na jednym okręgu.

Na zakończenie chciałbym przekazać istotną myśl: Pamiętajmy, że nauczyciel-urzędnik państwowy ma obowiązek zrealizować program, ale główną powinnością nauczyciela-wychowawcy i nauczyciela-mistrza jest

Warto uświadamiać uczniom, że poprawne merytorycznie, przejrzyste wykonane rysunki są bardzo pomocne w rozwiązywaniu zadań z geometrii.

stała i konsekwentna walka o to, by uczeń chciał i mógł się rozwijać, czyli wykraczanie poza program bez przekraczania możliwości uczniów. Nie obawiamy się tego zarówno w geometrii, jak i w pozostałych dziedzinach matematyki.

Stefan Mizia

Emerytowany nauczyciel XIV LO we Wrocławiu, autor zbioru zadań z geometrii „Wykaż, że...”.



Doskonałe wprowadzenie

w świat dowodów matematycznych!

Wyjątkowa publikacja poświęcona wyłącznie zadaniom na dowodzenie.



Zawiera ponad 230 starannie opracowanych zadań z pełnymi rozwiązaniami.

Matematyka jest w niej wyjaśniona językiem zrozumiałym dla ucznia.



Zamieszczono w niej zadania egzaminacyjne opracowane na podstawie materiałów CKE.

To jest mój dowód... osobisty, czyli o umiejętności dowodzenia twierdzeń

Rozumowanie oraz uzasadnianie faktów matematycznych to nietatwe umiejętności, wymagające pewnej dojrzałości intelektualnej.

W przypadku uczniów szkoły podstawowej problem z dowodzeniem twierdzeń jest zaledwie sygnalizowany, bo ich dojrzałość jest kwestią przyszłości, a świat pojęć matematycznych – niezbyt odległy od konkretnych obiektów. Nieco lepiej jest w gimnazjum; tam zasób narzędzi jest większy, a i sposób rozumowania coraz bardziej odbiega od operacji konkretnych i powoli zmierza ku działaniom na abstraktach. Dopiero jednak w szkole ponadgimnazjalnej można oczekiwać gotowości uczniów do rozumowania *stricte* teoretycznego. Niewątpliwymi sprzymierzeńcami w tej materii są rozwój intelektualny i coraz bogatsza wiedza. Nie wystarczą one jednak do tego, aby uczeń posiadał umiejętność swobodnego logicznego wnioskowania i dowodzenia twierdzeń matematycznych. Można uznać, że na etapie szkoły ponadgimnazjalnej jest on przygotowany do zdobywania tych umiejętności.

Dopiero trzyletnie przygotowanie do matury powinno rozwinąć jego potencjał.

Łatwo jest sformułować taką dyrektywę, a znacznie trudniej wskazać skuteczne środki jej realizacji. Powodów jest wiele. Jednym z istotniejszych jest niemożność sporządzenia listy kolejnych czynności, które należałoby wykonać, wykazu sugerowanych kroków czy choćby schematu postępowania. Rodzi to trudności po obu stronach procesu dydaktycznego. Młodzi ludzie narzekają, że umiejętność dowodzenia twierdzeń matematycznych jest trudna, a część z nich z góry odrzuca zadania rozpoczynające się od zwrotu: „Udowodnij, że...”.

Nauczyciele dostrzegają złożoność problemu i szukają sposobów skutecznego przybliżenia uczniom tej kompetencji, tym bardziej że od kilku lat wszyscy przystępujący do (obowiązkowego) egzaminu maturalnego z matematyki muszą się mierzyć z zadaniami na dowodzenie.



W skrócie

- Dlaczego uczniowie nie lubią zadań na dowodzenie?
- Sposoby na uczenie rozumowania i argumentacji.

Uczniowie obawiają się tych zadań głównie z trzech powodów:

- braku odpowiedniej wiedzy przedmiotowej,
- braku doświadczenia,
- niepewności odnośnie do reguł wnioskowania.

Pierwszy powód jest natury formalnej; zazwyczaj uczeń może sobie z nim poradzić samodzielnie. Dwa kolejne zależą od dydaktyki – zarówno bieżącej, jak i metodyki poprzedniego etapu edukacyjnego.

Co zrobić, aby uczniowie przyswajali bez większych stresów jedną z najważniejszych umiejętności matematycznych?

Niniejszy artykuł z pewnością nie udzieli wyczerpującej odpowiedzi na to pytanie. Może jednak zasugerować przykłady działań, które przyczynią się do skuteczniejszego i sprawniejszego kształcenia tej umiejętności.

Oswajanie poleceń

Niektórzy uczniowie źle reagują na polecenia: „Udowodnij, że...” czy „Wykaż, że...”. Jak pokonać tę psychologiczną barierę? Proponujemy przeformułowanie poleceń. Oto przykłady.

1. Zamiast polecenia:

$$\text{Udowodnij, że } \operatorname{tg} 15^\circ < \frac{1}{3}.$$

można zadać pytanie:

$$\text{Dlaczego } \operatorname{tg} 15^\circ < \frac{1}{3}?$$

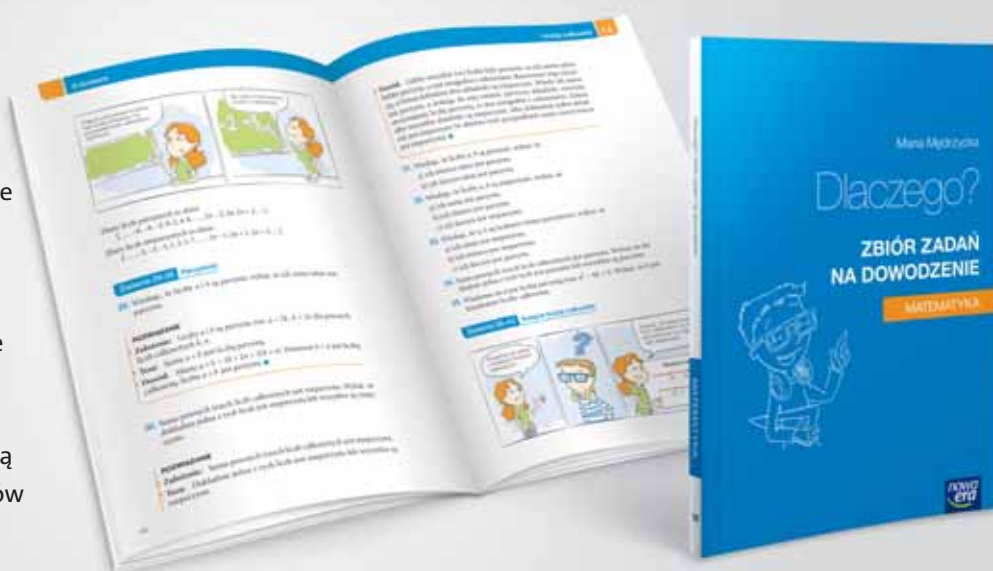
Odpowiedz na pytanie, nie korzystając z tablic ani z kalkulatora.

2. Zamiast:

Udowodnij, że suma dziesięciu liczb dwucyfrowych nie może być czterocyfrowa.

ZADANIA NA DOWODZENIE

Zbiór zawiera wyłącznie zadania na dowodzenie, obowiązkowe na egzaminie maturalnym i jednocześnie sprawiające uczniom najwięcej trudności. Pogrupowane tematycznie i zgodnie ze wzrastającym stopniem trudności zadania wraz z rozwiązaniami pozwalają przezwyciężyć lęk uczniów przed dowodami.



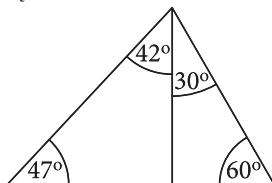
Dlaczego? Zbiór zadań na dowodzenie, s. 24–25.

można polecić:

Sprawdź, czy to prawda, że suma dziesięciu liczb dwucyfrowych nie może być czterocyfrowa.

3. Można nawet posłużyć się wersją fabularyzowaną i polecenie:

Udowodnij, że figura na rysunku nie jest trójkątem.



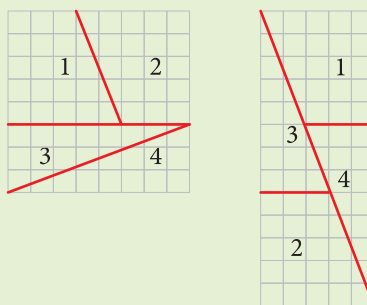
zastąpić poleceniem:

Wojtek twierdzi, że figura na rysunku jest trójkątem. Asia uważa, że jest to czworokąt. Kto ma rację?

Wzbudzanie potrzeby uzasadniania

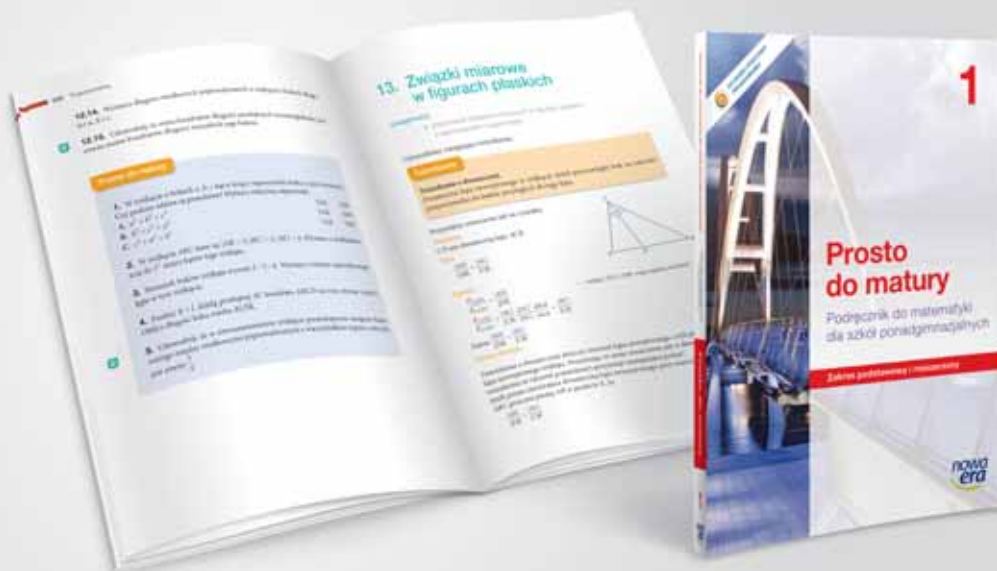
Uczniowie nie czują silnej potrzeby formalnego uzasadniania prawd matematycznych. Znaczna część wiedzy została im podana *ex cathedra*, bez wywodzenia jej z innych, wcześniej poznanych faktów. Dlatego polecenie udowodnienia pewnych treści traktują jako niekonieczne. Jak to zmienić?

Granie na emocjach – wiele faktów matematycznych może zaskakiwać, m.in. estetyką lub kontrowersyjnością – jak np. przedstawiona poniżej sztuczka dowodząca, że $64 = 65$.



TWIERDZENIA Z DOWODAMI

Twierdzenia poparte dowodami – to cecha wyróżniająca podręczniki z serii *Prosto do matury* spośród innych. Sprawiają one, że uczniowie mogą zrozumieć zależności, a nie jedynie uwierzyć, że istnieją. Dodatkowo wyróżnione zadania na dowodzenie do samodzielnego rozwiązywania rozwijają w uczniach umiejętność dowodzenia.



Podręcznik *Prosto do matury* 1, zakres podstawowy i rozszerzony, s. 388–389.

Najpierw pojawia się zaskoczenie, potem przemożna chęć wykrycia błędu, wreszcie – formalny dowód na fałszywość równości pól obu figur oparty np. na podobieństwie trójkątów (a właściwie jego braku).

Zaczepki intelektualne – pytanie o liczbę, jaką należy wpisać w puste pole tabeli.

-2	0	2	4
-8	0	8	

Zadanie jest celowo niedookreślone, aby wzbudzić kontrowersje wśród osób dostrzegających różne reguły – w puste pole można bowiem wpisać liczbę 16 (wedle zasady „górna liczba razy 4”) albo liczbę 64 (zgodnie z regułą „górna liczba do sześciastu”). Co prawda w tym zadaniu niczego nie uzasadniamy, ale ćwiczymy uczniów w sztuce rozumowania i formułowania argumentów, niezbędnej podczas dowodzenia.

Małymi kroczkami

Oto jeszcze jeden przykład – zadanie, które może wywołać obawy mniej wprawnych uczniów.

Dane są ciągi:

$$a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \text{ i } b_n = \sqrt{4n+2}.$$

Udowodnij, że dla każdego n będącego dodatnią liczbą naturalną zachodzi:

$$a) a_n < b_n, \quad b) b_n - a_n < 1.$$

Takich uczniów należy z zadaniem oswoić, sugerując im sprawdzenie obu tez dla kilku wybranych wartości n przy użyciu kalkulatora, następnie sprawdzenie obu nierówności, np. dla $n = 2$, bez użycia kalkulatora –

za pomocą rachunków na wyrażeniach zawierających pierwiastki oraz dzięki szacowaniu. Po tych doświadczeniach można im zaproponować przeprowadzenie ogólnego rozumowania naśladującego rachunki w konkretnym przypadku.

Dochodzenie do ogólnego dowodu małymi krokami, metodą kolejnych uogólnień, można prześledzić na przykładzie następującego twierdzenia.

Jeśli $ABCD$ jest dowolnym czworokątem, to odcinek łączący środki boków AB i CD przecina odcinek łączący środki boków BC i DA w punkcie, który jest środkiem każdego z nich.

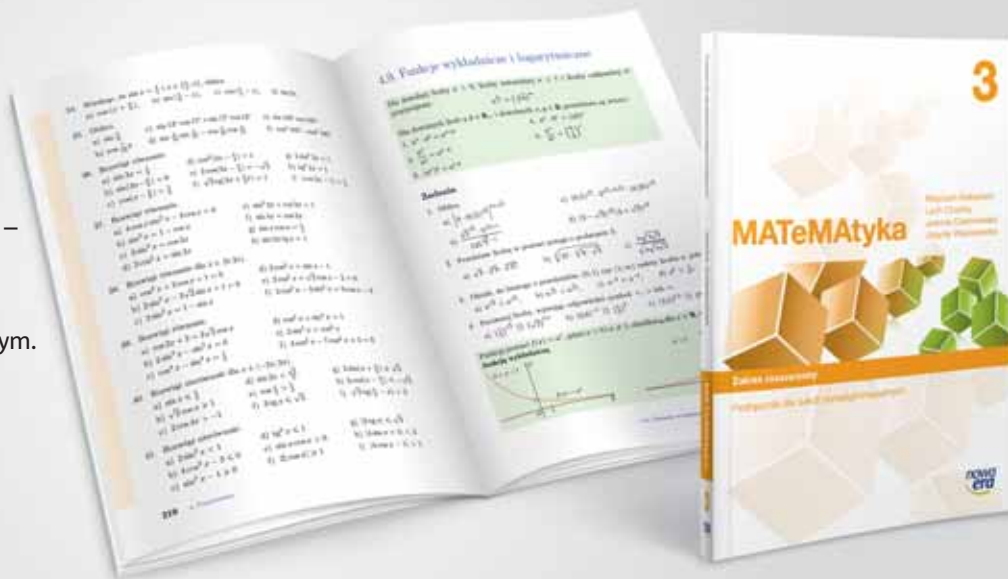
Jeśli dowód w wersji ogólnej jest poza zasięgiem wyobraźni uczniów, można najpierw spróbować uzasadnić tę własność dla kwadratu, prostokąta, rombu czy równoległoboku, a następnie przejść do trapezu i dowolnego czworokąta (również niewypukłego).

Na kilka sposobów

Stara, wielokrotnie przywoływana maksyma głosi, że lepiej rozwiązać jedno zadanie na kilka sposobów niż kilka zadań tym samym sposobem. Jest to kolejna sugestia, jak przybliżyć uczniom trudną sztukę dowodzenia twierdzeń. Zasób ich umiejętności jest zróżnicowany – to, co jest zrozumiałe dla jednego ucznia, nie zawsze jest przystępne dla innego. Prezentacja kilku sposobów udowodnienia twierdzenia każdemu z nich daje szansę znalezienia takiego rodzaju rozumowania, który go przekona i stanie się dla niego zrozumiały. Oczywiście, nie każde twierdzenie ma – jak twierdzenie Pitagorasa – kilkadziesiąt różnych dowodów, ale w wielu przypadkach można znaleźć rozmaite drogi dochodzenia do sedna. Najlepiej byłoby (czasem się to udaje), gdyby to były pomysły uczniów. Warto zorganizować giełdę pomysłów i co ciekawsze

**DOWODY
W MATEMATYCE**

Specjalny dodatek w podręczniku do klasy III pomaga przygotować uczniów do rozwiązywania zadań na dowodzenie – uznawanych za najtrudniejsze na egzaminie maturalnym.



Podręcznik *MATeMATyka 3*, zakres rozszerzony, s. 210–211.

propozycje rozwijać w pełen dowód. Na początku należy spróbować z prostymi faktami, np. takimi, jak przedstawione niżej.

Udowodnij, że $\sqrt{6} + \sqrt{6} < 3$.

Można podnieść obie strony do kwadratu albo wykorzystać fakt, że $\sqrt{6} < \sqrt{9}$.

Udowodnij, że krawędź czworościanu foremnego jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od odcinka łączącego jej środek ze środkiem przeciwległej krawędzi.

Wystarczy wpisać czworościan w sześcian albo zastosować twierdzenie Pitagorasa.

Bazą podobnych materiałów są schematy oceniania zadań maturalnych. Zwykle podaje się w nich po kilka sposobów rozwiązania.

Podsumowanie

Przedstawione pomysły nie wyczerpują oczywiście listy zabiegów dydaktycznych, które mogą usprawnić proces nauczania bardzo ważnej umiejętności – dowodzenia. Mogą jednak być inspiracją do własnych poszukiwań. Głównym celem tych zabiegów powinno być osiągnięcie przez uczniów takiego poziomu pojmowania samej czynności dowodzenia oraz biegłości w jej wykonywaniu, aby każdy z nich miał szansę o przeprowadzonym przez siebie rozumowaniu powiedzieć: To jest mój dowód. Osobisty...

Jerzy Janowicz

Nauczyciel matematyki, autor podręczników, książek pomocniczych oraz programów do nauczania matematyki.





MACIEJ WRÓBEL

Zasady oceniania zadań otwartych na maturze

W nauczanie matematyki warto inwestować. Nauka ta zmienia bowiem sposób rozumowania, co skutkuje zwiększeniem bystrości umysłu oraz rozwinięciem umiejętności wymaganych na maturze, takich jak zdolność przewidywania, wnioskowania, szybkiego przetwarzania danych i skupiania uwagi.

**W skrócie**

- Ocenianie analityczne a ocenianie holistyczne.
- Uczenie rozwiązywania zadań otwartych krok po kroku.

W 2015 r. na egzaminie maturalnym nastąpi zmiana sposobu oceniania zadań – z analitycznego na holistyczne. Na czym polega ta zmiana? Dotychczas na maturze obowiązywało **ocenianie analityczne**. W takiej sytuacji rozwiązywanie zadania jest dzielone na etapy – czynności, które uczeń ma wykonać. Za każdy poprawnie rozwiązany etap zdający otrzymuje 1 punkt. Jeżeli popełni błędy na wcześniejszych etapach, ale kolejną czynność wykona zgodnie z kryteriami, należy ją ocenić niezależnie od wcześniejszych błędów. Bywa zatem i tak, że uczeń zdobywa punkty, nie zbliżając się wcale do rozwiązania problemu.

Jest to więc system nagradzający wykazywanie się elementarnymi umiejętnościami, podczas gdy powinno się oceniać raczej umiejętność rozwiązywania problemów.

W **ocenianiu holistycznym** natomiast spełnienie kolejnych kryteriów oznacza zbliżanie się do rozwiązania problemu. Taki sposób oceny umożliwia zdobycie pełniejszej informacji o stopniu opanowania przez ucznia wiadomości i umiejętności.

Ocenianie holistyczne zadań otwartych polega bowiem na całościowym spojrzeniu na rozwiązanie. Ocena zależy od tego, jak daleko zdający doprowadził swoje rozwiązanie. W schemacie oceniania wyróżnia się najważniejszy etap: **pokonanie zasadniczych trudności zadania**. Za jego zrealizowanie uczeń otrzymuje co najmniej połowę punktów przysługujących za rozwiązanie całego zadania. Taki podział na etapy jest zgodny z zapowiadanymi zmianami na egzaminie dla poziomu rozszerzonego. Zgodnie z *Informatorem CKE* więcej będzie zadań sprawdzających

Ocenianie holistyczne zadań otwartych polega na całościowym spojrzeniu na rozwiązanie.

Ocena zależy od tego, jak daleko zdający doprowadził swoje rozwiązanie.

KOMENTARZE DO ROZWIĄZAŃ

Komentarze zamieszczone przy rozwiązaniach przykładowych zadań ułatwiają analizę schematu rozumowania i pozwalają prześledzić kolejne kroki rozwiązania.



Podręcznik *Prosto do matury 2*, zakres podstawowy, s. 86–87.

rozumienie pojęć matematycznych oraz umiejętność dobierania właściwych strategii w określonych warunkach.

Jak wykorzystać schemat punktowania w codziennej pracy?

Dzięki wyodrębnieniu w rozwiązaniu kolejnych kroków nauczyciel może pokazać uczniom, co jest ważne i na co należy zwrócić szczególną uwagę – w schemacie wyrażenie zaznaczono, co sprawia im największe kłopoty. Łatwiej więc podpowiadać uczniom etapy rozwiązania i tak ich wspomagać, aby potrafili pracować samodzielnie. Pomoże to również w uporządkowaniu wiedzy przyszłych maturzystów.

Pamiętajmy o tym, że zadania otwarte sprawiają uczniom dużo większą trudność niż zadania zamknięte. Łatwo to wytłumaczyć. Te drugie nie wymagają opracowania planu rozwiązania i są zwykle mniej złożone. Często można znaleźć poprawną odpowiedź metodą eliminacji, zawsze natomiast można zaznaczyć przypadkową odpowiedź, licząc, że się dobrze trafi.

W jaki więc sposób uczyć rozwiązywania zadań otwartych? Oto parę zasad, którymi warto się kierować.

George Polya*, amerykański matematyk, podaje cztery etapy rozwiązywania zadań otwartych:

1. analiza zadania,
2. ułożenie planu rozwiązania,
3. rozwiązanie zadania,
4. krytyczna analiza rozwiązania.

Teoretycznie są to oczywiste kroki, niemniej uważajmy, by nie pominąć żadnego z nich. Warto naprowadzać ucznia na poprawne rozwiązanie poprzez stawianie pomocniczych pytań. Takich jednak, które nie sugerują metody rozwiązania – uczeń osiągnie dużo większą korzyść, jeżeli sam wymyśli i ułoży plan rozwiązania. W zadaniach, w których ma to uzasadnienie, warto zaproponować

zilustrowanie opisanego w nich problemu. Na koniec zawsze należy wymagać od ucznia krytycznej analizy otrzymanych wyników, a więc sprawdzenia, czy spełnione są warunki zadania, czy wyniki nie są sprzeczne z naturą zmiennej oraz czy wszystkie przypadki zostały rozpatrzone.

Nie zapominajmy także o tym, jak bardzo przydatne jest stopniowanie trudności i złożoności

Dzięki wyodrębnieniu w rozwiązaniu kolejnych kroków nauczyciel może pokazać uczniom, co jest ważne i na co zwrócić szczególną uwagę. Łatwiej może im także podpowiadać etapy rozwiązania i tak ich wspomagać, aby potrafili pracować samodzielnie. Pomoże to również w uporządkowaniu wiedzy przyszłych maturzystów.

zadań. Warto je tak układać, by w kolejnych zadaniach uczniowie mogli wykorzystać sposoby poznane przy rozwiązywaniu wcześniejszych zadań. Pamiętajmy również, by uogólniać zadania i zadawać uczniom bardziej teoretyczne pytania. Może im to pozwolić na przykład zauważyć jakąś ogólną prawidłowość.

Sprawdźmy na przykładzie, jak wygląda schemat oceniania w nowej formie, i zastanówmy się, jakie błędy uczniowie mogliby popełniać oraz na co szczególnie należy zwrócić ich uwagę.

Nie zapominajmy o tym, jak bardzo przydatne jest stopniowanie trudności i złożoności zadań. Warto je tak układać, by uczniowie mogli wykorzystać sposoby poznane przy rozwiązywaniu wcześniejszych zadań.

* G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011.

MODELOWE ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Pozwalają uczniom śledzić sposób oceniania i określać na bieżąco liczbę zdobytych punktów, co bardzo ułatwia ocenę stopnia przygotowania do matury.



Zbiór zadań i zestawów maturalnych, *Teraz matura*, matematyka, poziom rozszerzony, s. 108–109.

Zadanie 5. (4 pkt)

Kierowca obliczył, że trasę 220 km pokona w czasie t , jeśli będzie jechał ze średnią prędkością v . Wyjechał o 20 minut później niż zamierzał, więc aby dojechać na zaplanowaną godzinę, musiał zwiększyć średnią prędkość o 5 km/h. Oblicz v .

Źródło: Zbiór zadań i zestawów maturalnych, *Teraz matura*, matematyka, poziom rozszerzony, s. 90.

Rozwiązanie

1. Zapiszmy dane występujące w zadaniu.

	droga (km)	czas (h)	prędkość (km/h)
wyjazd planowany	220	t	v
wyjazd z opóźnieniem	220	$t - \frac{1}{3}$	$v + 5$

Uwagi dla uczniów:

- Dane możesz zapisać w dowolny sposób.
 - Pamiętaj o zamianie jednostek: 20 minut to $\frac{1}{3}$ godziny. Jeżeli tego nie zrobisz, za całe rozwiązanie otrzymasz 0 punktów. Natomiast jeżeli tego nie zrobisz, ale skomentujesz otrzymany wynik jako sprzeczny z rzeczywistością ($v < 6$ km/h), otrzymasz 1 punkt.
2. Zapisujemy układ równań, pamiętając, że droga to iloczyn prędkości i czasu.

$$\begin{cases} tv = 220 \\ \left(t - \frac{1}{3}\right)(v + 5) = 220 \end{cases}$$

Uwagi dla uczniów:

- Nie musisz zapisywać jednostek prędkości, drogi i czasu.
 - Jeżeli zapiszesz tylko równanie $s = v \cdot t$ lub błędnie zapiszesz układ równań, za całe rozwiązanie otrzymasz 0 punktów.
3. Z układu równań wyprowadzamy równanie z jedną niewiadomą. Rozwiązujemy to równanie.

$$v^2 + 5v - 3300 = 0$$

$$v_1 = 55, \quad v_2 = -60$$

Uwagi dla uczniów:

- Jeżeli poprawnie zapiszesz równanie, to znaczy, że zostały pokonane zasadnicze trudności w zadaniu i otrzymasz 3 punkty.
- Pamiętaj o zapisaniu, że v_2 nie spełnia warunków zadania, bo prędkość w tym zadaniu nie może być ujemna.
- Możesz najpierw wyprowadzić równanie z niewiadomą t , a dopiero w kolejnym kroku wyznaczyć v :

$$3t^2 - t - 44 = 0,$$

$$t_1 = -\frac{22}{6}, \quad t_2 = 4.$$

- Ujemne rozwiązanie odrzucamy (czas nie może być ujemny), a dodatnie wykorzystujemy do obliczenia v :

$$v = \frac{220}{t} = \frac{220}{4} = 55.$$

4. Zapisujemy odpowiedź.
Planowana prędkość to 55 km/h.



Przykład. Sposoby przydziału punktów za poszczególne fazy rozwiązania zadań rozszerzonej odpowiedzi

Najprostszy podział punktów za rozwiązanie zadania za 5 punktów wygląda następująco:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu 0 pkt
2. został dokonany istotny postępowanie w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania 1 pkt
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy, usterki 2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie 3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) 4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie 5 pkt

A oto inny przydział punktów w zadaniu za 5 punktów :

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu 0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt
3. został dokonany istotny postępowanie w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki 2 pkt
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie 3 pkt
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) 4 pkt
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie 5 pkt

Przykładowy sposób przydziału punktów w zadaniu za 6 punktów:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu 0 pkt
2. rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt
3. został dokonany istotny postępowanie w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania 2 pkt
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki 3 pkt
5. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie 4 pkt
6. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) 5 pkt
7. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie 6 pkt

Źródło: Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015, CKE i OKE, Warszawa 2013, s. 12–13.

**WSKAZÓWKI
DO ROZWIĄZAŃ**

Komentarze i wskazówki przy rozwiązaniach zadań zwracają uwagę na zagadnienia szczególnie ważne z punktu widzenia maturzysty.



Vademecum, *Teraz matura*, matematyka, poziom podstawowy, s. 24–25.

Spójrzmy na przedstawione obok schematy oceniania zaproponowane przez CKE. Na ich podstawie stwórzmy schemat oceniania rozwiązanego przez nas zadania:

1. Został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności (1 p.)

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} tv = 220 \\ \left(t - \frac{1}{3}\right)(v + 5) = 220 \end{cases}$$

2. Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania popełniono błędy (2 p.)

Wyprowadzenie z błędami równania z jedną niewiadomą i kontynuowanie rozwiązania.

3. **Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania** i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie (3 p.)

Zapisanie równania z jedną niewiadomą t lub v :

$$v^2 + 5v - 3300 = 0 \quad \text{lub} \quad 3t^2 - t - 44 = 0$$

4. Zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie (4 p.)

Wyznaczenie szukanej wartości: 55 km/h.

Miejmy nadzieję, że zmiana oceniania zadań otwartych na maturze naprawdę się sprawdzi. Uczniowie powinni zdobywać punkty raczej za wymyślenie i naszkicowanie planu rozwiązania, niż za poprawne obliczenie przypadkowych wielkości w zadaniu, jak bywało do tej pory.

Anna Biskupska

Nauczyciel matematyki
w liceum ogólnokształcącym.





SHUTTERSTOCK/ANATOLI STYF

Równowaga i rozwaga – o idealnych proporcjach w wykorzystywaniu publikacji papierowych i cyfrowych

Wybór odpowiednich narzędzi dydaktycznych należy do nauczyciela. To on decyduje o tym, kiedy sięgnąć po nową technologię, a kiedy nie. Właściwe wykorzystanie rozwiązań cyfrowych może wspomóc proces uczenia się i podnieść jego efektywność. Jednak trzeba z tych pomocy korzystać odpowiedzialnie, rozważając plusy i minusy każdego rozwiązania.

Wczoraj i dziś

Komputer jako pomoc dla nauczyciela jest narzędziem bardzo przydatnym. Można dzięki niemu pokazać doświadczenia, których nie da się wykonać w klasie, odbyć wirtualne podróże, na które nie moglibyśmy zabrać uczniów, a nawet eksperymentować z czasem: cofać go, przyspieszać, zwalniać.

Ktoś może powiedzieć, że do tego nie potrzeba komputera, wystarczy film lub odpowiedni program telewizyjny. To prawda, jednak komputer daje znacznie większą elastyczność. Nauczyciel może bowiem dostosować przekaz do uczniów, niektóre fragmenty przyspieszyć lub pominąć, a inne w razie potrzeby powtórzyć.

Komputer jako pomoc dla nauczyciela jest narzędziem bardzo przydatnym. Można dzięki niemu pokazać doświadczenia, których nie da się wykonać w klasie, odbyć wirtualne podróże, na które nie moglibyśmy zabrać uczniów, a nawet eksperymentować z czasem: cofać go, przyspieszać, zwalniać.

Teraz szykuje się kolejna rewolucja – tablet. Jest lekki, płaski, długo działa po naładowaniu, może być zawsze pod ręką. W tablecie może być zawarte wszystko, czego potrzeba do nauki: podręczniki, lektury, a także aplikacje do pisania, rysowania i obliczania. Wbudowana karta sieciowa daje połączenie z Internetem, a więc zapewnia stały dostęp do nieograniczonych zasobów sieci. Ta mała tabliczka jest wielką nadzieją rewolucji, której już niedługo dokona w szkole technologia.

Ale może wcale nie będzie rewolucji. Bo co nowego jest w tablecie? Można notować, rysować, obliczać... A nie można było tego robić wcześniej? Podobnie było z tablicą szkolną.

Szkola nie zawsze miała tablice – jest to technologia stworzona specjalnie na jej użytek przez szkockiego nauczyciela geografii Jamesa

Pillansa w 1800 roku. Wymyślił on sposób na lepszą prezentację treści lekcji wszystkim uczniom na raz: poprosił woźnego, by sklecił kilka desek, pomalował je na czarno i powiesił na ścianie w klasie. Na tych deskach można było pisać kredą – tak jak wcześniej robili to nauczyciele na małych, podręcznych tabliczkach. Zmiana wydawała się jednak rewolucyjna: nie trzeba było pokazywać tabliczki każdemu uczniowi z osobna. Wszyscy widzieli od razu, co nauczyciel pisze, mogli to więc bez problemu przeczytać i skopiować. Nic dziwnego, że już 50 lat później praktycznie nie było szkoły bez tablic. Czy tablica spowodowała rewolucję w nauczaniu? Przemieniła szkołę? Nie, metody nauczania niewiele się zmieniły, treści nie zmieniły się wcale, a relacja nauczyciel-uczeń pozostała taka sama.

Tablica nie zrewolucjonizowała szkoły, wzbogaciła jedynie warsztat pracy nauczyciela. Tak też powinno się traktować komputerowe nowinki techniczne. Stosować je wtedy, gdy są najbardziej skutecznym sposobem uczenia oraz przedłużeniem naturalnych działań nauczyciela. Idący z duchem czasu nauczyciel zauważa potencjał tkwiący w komputerze, który może wykorzystać na lekcji, na przykład do znajdowania prawidłowości w drodze obserwacji wielu eksperymentów. Bez komputera nie można przeprowadzić dużej liczby doświadczeń, bo po prostu zabraknie czasu, a i powtarzanie tej samej procedury w minimalnie tylko zmienianych warunkach jest nużące dla uczniów. Komputer upraszcza i przyspiesza ten proces.

Zastosowanie teorii w praktyce

Wykorzystując komputer w każdej formie: jako narzędzie pracy ucznia, środek przekazu dla całej grupy czy jako doraźną pomoc w rozwiązywaniu problemów, trzeba zdawać sobie sprawę z tego, że jest to medium zaborcze i zimne. Może z jednej strony zawładnąć uwagą uczniów do końca zajęć, a z drugiej – zniechęcić ich do aktualnego tematu.

**W skrócie**

- Czy tablet zrewolucjonizuje szkołę?
- Jak wykorzystać nowoczesną technologię z korzyścią dla uczniów?

Z tymi problemami można sobie poradzić, wykorzystując teorię Richarda Mayera, dotyczącą nauczania za pomocą multimediów, opartą na wnioskach z badań nad przepustowością kanałów percepcyjnych człowieka. Podstawową ideą tej teorii jest ochrona ucznia przed przeciążeniem, realizowana nie przez ograniczenie informacji, ale przez odpowiednie dobieranie środków ich przekazywania. Jednoczesne wykorzystanie wzroku i słuchu pozwala na szybsze przyswojenie treści, niż kiedy wykorzystuje się tylko wzrok lub tylko słuch. Na przykład umieszczenie dużego tekstu na ilustracji zmusza do wykorzystania wyłącznie jednego zmysłu: wzroku, podczas gdy inne pozostają bezczynne. Nic dziwnego, że uczeń, korzystając z takiej ilustracji, będzie uczył się wolniej. Plansza bez napisów, którą komentuje nauczyciel, ma znacznie lepsze oddziaływanie, ponieważ angażuje dwa kanały percepcyjne: wzrokowy

Tablica nie zrewolucjonizowała szkoły, wzbogaciła jedynie warsztat pracy nauczyciela. Tak też powinno się traktować komputerowe nowinki techniczne. Stosować je wtedy, gdy są najbardziej skutecznym sposobem uczenia oraz przedłużeniem naturalnych działań nauczyciela.

(plansza) i słuchowy (komentarz nauczyciela). Jednoczesne pobudzenie wzroku i słuchu likwiduje przeciążenie jednego kanału. Choć ekran wydaje się centralnym punktem lekcji, to jednak nauczyciel kieruje nią i może ją poprowadzić tak, by uczeń budował swoją wiedzę, a nie tylko zapamiętywał obraz. Może tego dokonać, robiąc np. przerwy w odpowiednich momentach projekcji i zadając dodatkowe pytania.

Tabela 1. Formy uczenia się

Formy uczenia się	Uczenie się polega na	Uczeń jest	Nauczyciel	Technologia jest narzędziem
Utrwalanie reakcji	wzmacnianiu zachowań pożądanых i osłabianiu zachowań niechcianych	biernym odbiorcą nagród i kar	nagradza i karze	wzbudzania reakcji i przekazywania informacji zwrotnej
Nabywanie informacji	zapamiętywaniu informacji i procedur	biernym odbiorcą informacji	dostarcza informacji	dostępu do informacji
Budowanie wiedzy	konstruowaniu umysłowych reprezentacji wiedzy	aktywnym twórcą znaczenia	wskazuje kierunki rozwoju	poznawczego przetwarzania informacji

Opracowanie własne na podstawie:

Richard E. Mayer, *Uczenie się z wykorzystaniem technologii* [w:] Dumont H., Istance D., Benavides F., *Istota uczenia się*, Wolters Kluwer Polska SA, Warszawa 2013, s. 287.

Ruth C. Clark, Richard E. Mayer, *E-Learning and the Science of Instruction: Proven Guidelines for Consumers and Designer of Multimedia Learning*, Pfeiffer, San Francisco, California 2008, s. 34.

Wykorzystując komputer w każdej formie: jako narzędzie pracy ucznia, środek przekazu dla całej grupy czy jako doraźną pomoc w rozwiązywaniu problemów, trzeba zdawać sobie sprawę z tego, że jest to medium zaborcze i zimne. Może z jednej strony zawładnąć uwagą uczniów do końca zajęć, a z drugiej – zniechęcić ich do aktualnego tematu.

Psychologia poznawcza pokazuje, że uczenie się zachodzi tylko wtedy, gdy uczeń jest zaangażowany w przetwarzanie materiału, a więc gdy śledzi napływające informacje, buduje z nich modele mentalne i integruje z posiadaną wiedzą.

Mamy więc trzy następujące po sobie fazy: **selekcja** (wybór materiału, na który uczeń zwraca uwagę), **organizacja** (tworzenie wyobrażeń i modelu w umyśle ucznia) i **integracja** (powiązanie nowej wiedzy z uprzednio zachowaną w pamięci długotrwałej).

Selekcję wspomagamy przez upraszczanie środowiska uczenia się. Klasycznym przykładem jest unikanie zdjęć tam, gdzie wystarczy schemat. To, że będzie on prosty i siermiężny, jest tylko zaletą, ponieważ skupia uwagę na tym, co jest ważne i nie przeładowuje kanału wzrokowego nadmiarem nieistotnych szczegółów.

Najważniejszym narzędziem wspomagania organizacji poznawanego materiału jest segmentacja: dostosowanie rozmiaru materiału multimedialnego (np. długości filmu czy animacji, wielkości obrazu czy czasu nagrania audio) do możliwości ucznia. Krótsze, ale logicznie spójne fragmenty są lepszym materiałem edukacyjnym niż długie sekwencje. Można to zaobserwować na przykładzie filmów edukacyjnych. Po krótkim wprowadzeniu – przygotowaniu do problemu pokazanego na filmie – następuje projekcja, którą można przerwać w dowolnym momencie, np. gdy

widać wynik omawianego procesu lub eksperymentu, a jeszcze nie zaczęły się rozważania teoretyczne (możliwość włączenia pauzy w dowolnym momencie to jedna z najważniejszych cech materiałów multimedialnych), aby omówić z uczniami to, co właśnie zobaczyli. Ta przerwa pozwoli uczniom stworzyć mentalny model poznawanego procesu lub doświadczenia, a więc podstawę do rozważań teoretycznych. Oczywiście nauczyciel może odtworzyć ten fragment jeszcze raz, jeżeli uzna, że to pomoże uczniom w zrozumieniu zagadnienia i uporządkowaniu wiedzy. Dal-
szy ciąg lekcji zależy od jej charakteru. Film można wyświetlić w całości, gdy lekcja ma być podająca, lub przerywać go po kolejnych etapach, by dać uczniom czas na samodzielne wykonanie przekształceń – gdy lekcja ma być problemowa.

Trzeci etap wewnętrznego procesu uczenia się to przetwarzanie twórcze, czyli integracja nowych wiadomości, spostrzeżeń i modeli z wiedzą wcześniej nabytą. Zaobserwowano, że korzystniejsze jest jednoczesne prezentowanie słów i obrazów niż samych słów lub samych obrazów. Właściwie nie jest to nic nowego, jednak zasada multimedialności mówi o tym, by nie zastępować jednego przekazu drugim. Nie: obraz *zamiast* słów, ale: *jednocześnie* słowa i obrazy.

Przemyślane zastosowanie nowoczesnych, komputerowych środków nauczania potrafi zdziałać cuda: „Zalety z używania technologii w klasie rozciągają się od zmniejszenia obciążenia nauczyciela po wzrost szybkości uczenia się, motywacji i wiedzy ucznia oraz jego umiejętności niezbędnych do uczenia się przez całe życie w erze technologii”¹. Trzeba tylko zwrócić uwagę na to, że w centrum powinien znajdować się uczeń, a nie komputer. Wszystko, co pokazuje się uczniowi, ma pomóc mu w nauce, a nie wykazać, że nauczyciel potrafi wykorzystywać nowoczesne technologie.

¹ Jamie Eflaw, *No Teacher Left Behind: How to Teach with Technology*, „Educause Quarterly”, No 4/2005, s. 32.

Niestety nie ma twardych zasad mówiących, kiedy stosować nową technologię, a kiedy nie. Można jedynie rozważać ogólne zasady wykorzystywania zasobów pewnych typów: grafiki, animacji, tekstu, wynikające z badań psychologii poznawczej i teorii – takich jak wspomniana wcześniej teoria R. Mayera. Odpowiednie wykorzystanie technologii komputerowych może wspomagać proces uczenia się, a na pewno podnosić jego efektywność.

Wykorzystanie nowoczesnych rozwiązań na lekcji

Materiały multimedialne zwykle można wykorzystywać na wiele sposobów. Na przykład filmy z długotrwałych czy niebezpiecznych doświadczeń (jest to jeden z tych przypadków, w których zastąpienie działalności bezpośredniej filmem jest w pełni uzasadnione)

mogą być centralnym punktem lekcji. Można pokazać je na dużym ekranie (zamiast filmu można posłużyć się zdjęciami), ale nie wszystko powinno być podane uczniom bezpośrednio. Warto też różnicować źródła i czerpać wiedzę nie tylko z komputera.

Film można też wykorzystać jako wprowadzenie do lekcji. Po obejrzeniu np. doświadczenia uczniowie pracują z aplikacją interaktywną. Efektem takiej pracy powinna być notatka w zeszycie – zwracam uwagę na konieczność sporządzania notatki w czasie pracy z zasobami cyfrowymi, gdyż pracując z komputerem, uczniowie często zapominają notować, w efekcie czego po lekcjach nie pozostaje nawet ślad w zeszycie.

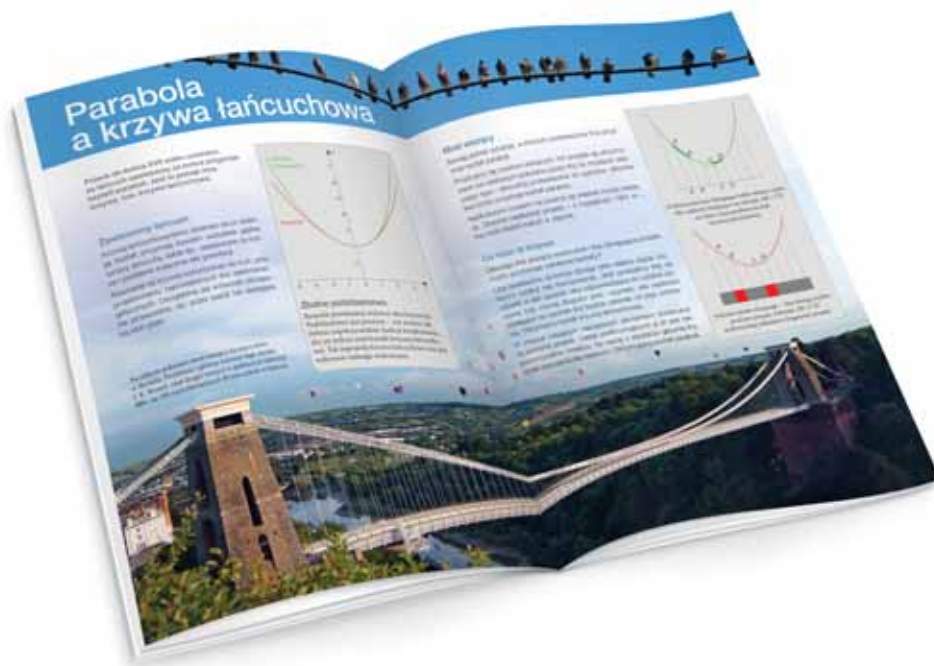
Ważne jest określenie roli, jaką ma odgrywać komputer w toku lekcji. Może być podstawowym źródłem wiedzy, gdy uczniowie



Fot. 1. Zadania matematyczne wyświetlone w postaci zasobów multimedialnych urozmaicają lekcje matematyki. Dodatkowo pomagają w tłumaczeniu trudnych zagadnień i oszczędzają czas potrzebny na przygotowanie lekcji.

Multiteka, *MATeMATyka 1*, zakres podstawowy i rozszerzony.

Fot. 2. Infografiki umożliwiają przedstawienie skomplikowanych tematów w sposób, który zachęca uczniów do ich dokładniejszego zgłębienia.
Podręcznik *Prosto do matury 2*, zakres podstawowy, s. 18–19.



Przemyślane zastosowanie nowoczesnych, komputerowych środków nauczania potrafi zdziałać cuda: „Zalety z używania technologii w klasie rozciągają się od zmniejszenia obciążenia nauczyciela po wzrost szybkości uczenia się, motywacji i wiedzy ucznia oraz jego umiejętności niezbędnych do uczenia się przez całe życie w erze technologii”. Trzeba tylko zwrócić uwagę na to, że w centrum powinien znajdować się uczeń, a nie komputer.

korzystają z e-booka lub specjalnej aplikacji albo wyszukują informacje w Internecie. Może być źródłem pomocniczym, organizującym lekcję. Może też być tylko ilustracją ważnych zagadnień. Komputer można również wykorzystać zgodnie z jego pierwotnym przeznaczeniem, a więc jako maszynę liczącą, i z jego pomocą (a właściwie przy wykorzystaniu aplikacji, takich jak arkusz kalkulacyjny) opracowywać wyniki doświadczeń lub nawet symulować pewne zjawiska, a następnie

z nimi eksperymentować. W każdym przypadku **komputer jest tylko narzędziem wykorzystywanym przez nauczyciela**, tak jak kreda i tablica.

Komputer wraz z nieograniczonymi zasobami Internetu jest z pozoru tak atrakcyjnym narzędziem edukacyjnym, że wydaje się, iż można zapomnieć o podręcznikach, wykładzie nauczyciela, encyklopedii, atlasie i tablicach – skoro wszystko można znaleźć w sieci, w różnych wersjach, z których można wybrać najlepszą.

Niestety wyszukując treści wyłącznie w Internecie, uczniowie nie nauczą się tego, czego nauczyć się powinni: zamiast wiedzy przedmiotowej doskonałą bowiem jedynie umiejętność wyszukiwania informacji. Dlatego nie można oprzeć edukacji tylko na tym, co jest w Internecie, ponieważ **edukacja to nadawanie znaczenia zdobywanym wiadomościom** (przez samego ucznia).

Ważna jest też różnorodność wykorzystywanych źródeł. Nie chodzi tylko o wiarygodność (choć na to też trzeba zwracać uwagę), ale o to, by nauczyć przyszłych maturzystów korzystania z materiałów różnych typów.

Fot. 3. Infografika.

Podręcznik *Prosto do matury 2*,
zakres podstawowy, s. 174–175.



Funkcję edukacyjną mają nie tylko filmy i animacje, nie tylko symulacje i interakcje. Cennymi źródłami wiedzy są ponadto teksty i statyczne obrazy – zamieszczone zarówno na stronach WWW, jak i w książkach (Fot. 2 i 3) czy czasopismach. **Uczenie to także uruchamianie wyobraźni.**

Samo zdobywanie informacji jest istotne – bez nich nie ma bowiem podstaw do budowania rozumienia. Jednak **równie ważne jak zbieranie jest segregowanie wiadomości**, i właśnie te umiejętności, w odpowiednich proporcjach, tworzą spójną edukację. W każdym z tych elementów jest miejsce na wprowadzenie nowych technologii, ale nie trzeba jej wykorzystywać zawsze i za wszelką cenę. Nauczyciel nie może pozwolić, by całkowitą kontrolę nad edukacją ucznia przejął komputer.

Od początku nauczania i pewnie aż po jego kres najważniejszym narzędziem rewolucji był, jest i będzie nauczyciel. Warto zatem, aby podążał on z duchem czasu, był otwarty na wszelkie nowości, na to, co oferuje współczesna technika, ale jednocześnie, aby zachował w stosunku do nich zdrowy krytycyzm – tak, by nie przedkładać formy nauczania nad jego treści...

dr Leszek Rudak

Matematyk, pracownik Uniwersytetu Warszawskiego, zajmujący się (w teorii i w praktyce) nauczaniem z wykorzystaniem nowych technologii, autor wielu publikacji naukowych, dotyczących m.in. metodologii e-learningu.

Najważniejsze
umiejętności
sprawdzone
na egzaminie
maturalnym
z matematyki

ROZWIĄZYWANIE
ZADAŃ
NA DOWODZENIE

ROZWIĄZYWANIE
ZADAŃ
KROK PO KROKU

ROZWIĄZYWANIE
ZADAŃ
GEOMETRYCZNYCH

ROZWIĄZYWANIE
ZADAŃ
MATURALNYCH

PROSTO DO MATURY		
ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY	ZAKRES PODSTAWOWY
 podręczniki ☒ oznaczone zadania na dowodzenie ☒ twierdzenia z dowodami	 podręczniki ☒ oznaczone zadania na dowodzenie ☒ twierdzenia z dowodami	 podręczniki ☒ zadania typu <i>Uzasadnij, że...</i> ☒ w klasie 3 – dodatek <i>Dowody w matematyce</i>
☒ wyszczególnienie kolejnych kroków rozwiązania ☒ różne metody rozwiązania jednego zadania ☒ komentarze do rozwiązań	☒ wyszczególnienie kolejnych kroków rozwiązania ☒ różne metody rozwiązania jednego zadania ☒ komentarze do rozwiązań	☒ szczegółowo rozwiązane przykłady ☒ komentarze do rozwiązań ☒ zadania skorelowane z rozwiązaniem przykładem
☒ czytelne rysunki merytoryczne ☒ szczegółowe rozwiązania trudnych zadań z geometrii ☒ zadania konstrukcyjne	☒ czytelne rysunki merytoryczne ☒ szczegółowe rozwiązania trudnych zadań z geometrii ☒ zadania konstrukcyjne	☒ czytelne rysunki merytoryczne ☒ przykładowe rozwiązania zadań z geometrii ☒ zadania ułożone według wzrastającego stopnia trudności ☒ zadania konstrukcyjne
☒ zestawy zadań na końcu każdego tematu ☒ zadania typu maturalnego ☒ zestawy zadań po każdym dziale ☒ zadania z kodowaną odpowiedzią ☒ zestawy maturalne wzorowane na arkuszach CKE	☒ zestawy zadań na końcu każdego tematu ☒ zadania typu maturalnego ☒ zestawy zadań po każdym dziale ☒ zadania z kodowaną odpowiedzią ☒ zestawy maturalne wzorowane na arkuszach CKE	☒ zestawy zadań typu maturalnego ☒ zestawy powtórzeniowe ☒ zestawy maturalne wzorowane na arkuszach CKE

MATeMATyka

ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY



podręczniki

zeszyty ćwiczeń

zbiory zadań



zadania typu *Uzasadnij, że...*



w klasie 3 – dodatek *Dowody w matematyce*



szczegółowo rozwiązane przykłady



komentarze do rozwiązań



zadania skorelowane z rozwiązaniem przykładem



czytelne rysunki merytoryczne



przykładowe rozwiązania zadań z geometrii



zadania ułożone według wzrastającego stopnia trudności



zadania konstrukcyjne



zestawy powtórzeniowe



zestawy maturalne wzorowane na arkuszach CKE



zadania z kodowaną odpowiedzią

ZBIORY ZADAŃ



w każdym dziale zadania
wymagające przeprowadzenia
dowodu



dowody w odpowiedziach



stopniowanie trudności zadań
na dowodzenie



zadania pogrupowane
tematycznie



kilka rozwiązań jednego zadania



czytelne rysunki do zadań i rozwiązań



dowody w geometrii

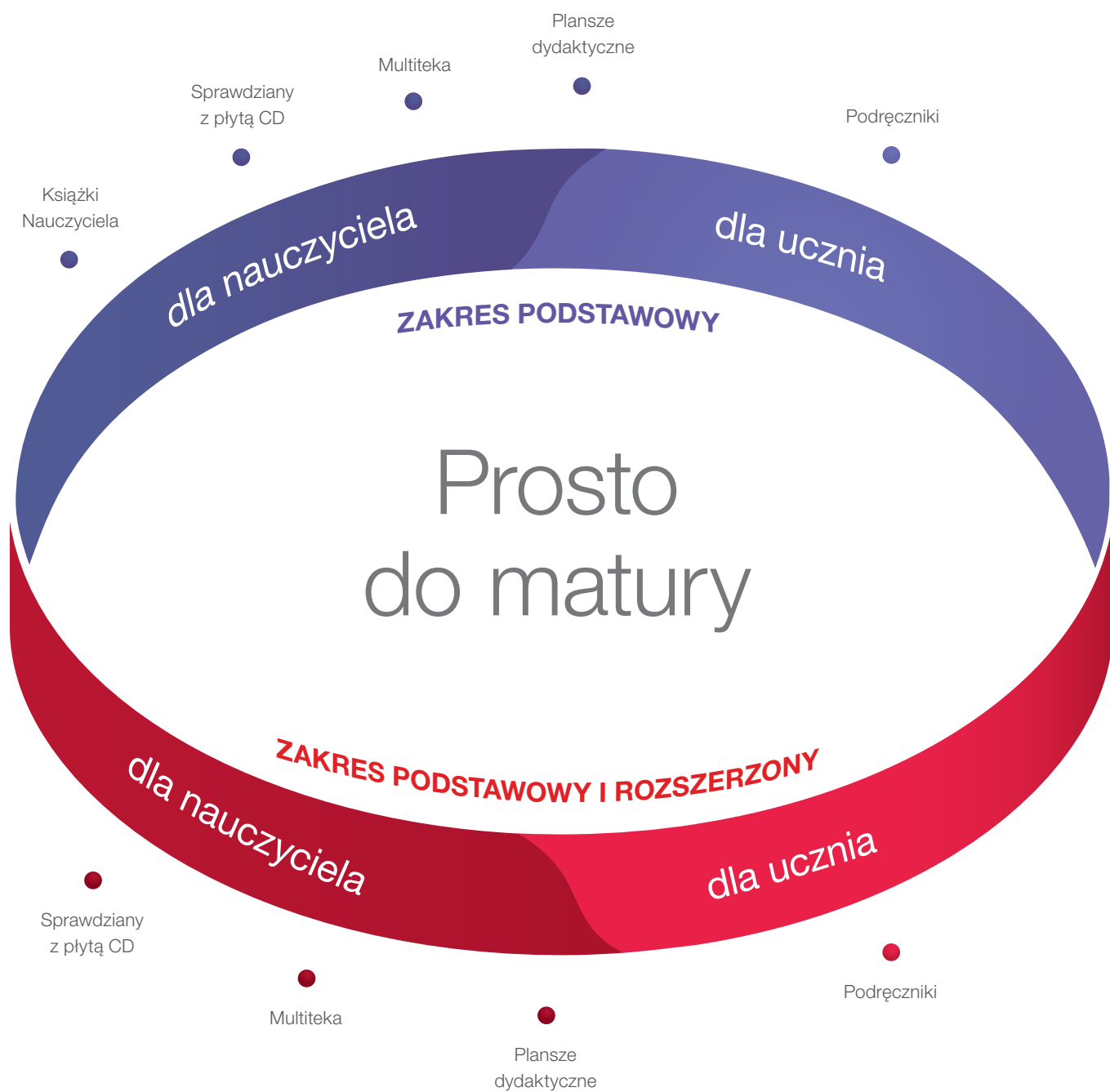


zadania egzaminacyjne CKE

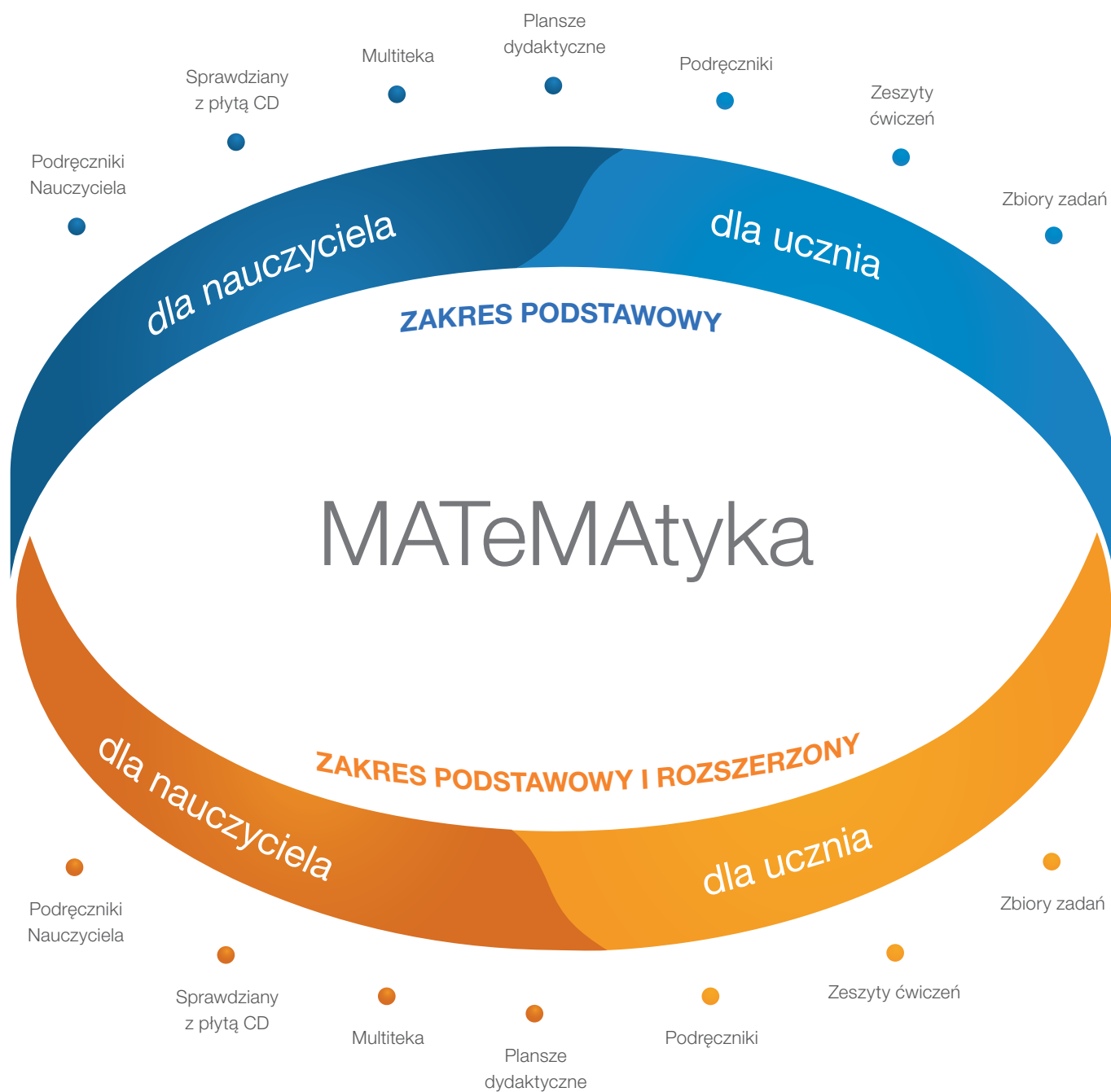


zadania o kontekście praktycznym

SYSTEMATYCZNE PRZYGOTOWANIE



DO MATURY 2015



TERAZ MATURA

POZIOM PODSTAWOWY

POZIOM ROZSZERZONY



zadania typu *Uzasadnij, że...*



dowody w rozwiązaniach



modelowe rozwiązania zadań otwartych



rozwiązania i wskazówki do rozwiązań



zadania rozwiązane krok po kroku



odsyłacze do teorii



czytelne rysunki merytoryczne



przykładowe rozwiązania zadań



zestawy maturalne wzorowane na arkuszach CKE



powtórzenie teorii



rozwiązania zadań zamkniętych



karta wzorów CKE



zadania typu *Uzasadnij, że...*



dowody w rozwiązaniach



modelowe rozwiązania zadań otwartych



rozwiązania i wskazówki do rozwiązań



zadania rozwiązane krok po kroku



odsyłacze do teorii



czytelne rysunki merytoryczne



przykładowe rozwiązania zadań



zestawy maturalne wzorowane na arkuszach CKE



zadania z kodowaną odpowiedzią



zadania typu maturalnego



powtórzenie teorii



rozwiązania zadań zamkniętych



rozwiązane przykłady



karta wzorów CKE



Najważniejsze umiejętności na egzaminie maturalnym z matematyki

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ NA DOWODZENIE

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ KROK PO KROKU

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ GEOMETRYCZNYCH

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ MATURALNYCH

SKUTECZNE PRZYGOTOWANIE DO MATURY 2015



Z Nową Erą zawsze aktualne informacje

www.nowaera.pl

Na stronie przedmiotowej matematyki
można znaleźć:

- programy nauczania matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych
- rozkłady materiału
- plany wynikowe
- wymagania edukacyjne
- różnorodne scenariusze, kartkówki, testy oraz inne pomoce pogrupowane w Bibliotece materiałów dydaktycznych
- aktualne informacje dotyczące procesu nauczania
- inspiracje do prowadzenia niezwykłych lekcji
- informacje o Maturze 2015

Przewodniki dla nauczycieli

Cykliczne publikacje, w których nauczyciele znajdą zarówno informacje o zmianach w edukacji czy artykuły z zakresu dydaktyki, jak i propozycje skutecznych metod rozwijania umiejętności złożonych uczniów, sprawdzanych podczas egzaminów.



Biuletyny internetowe

Wysyłane regularnie za pośrednictwem poczty elektronicznej do nauczycieli matematyki zawierają:

- dodatkowe materiały na ciekawe lekcje
- dodatkowe testy i sprawdziany
- informacje o nowościach wydawniczych i spotkaniach organizowanych przez wydawnictwo Nowa Era
- informacje o zmianach w edukacji

Cykliczne spotkania i warsztaty

- odbywają się w całej Polsce
- stanowią doskonałą okazję do zademonstrowania nowoczesnych narzędzi edukacyjnych, które ułatwiają nauczycielom pracę i motywują uczniów do nauki
- dzięki ciekawej formule dostarczają nauczycielom nowych pomysłów do wykorzystania na zajęciach z uczniami

Informacje o spotkaniach można uzyskać:

- odwiedzając stronę internetową wydawnictwa www.nowaera.pl
- dzwoniąc na infolinię:
801 88 10 10 (z telefonów stacjonarnych)
58 721 48 00 (z telefonów komórkowych)

Chcesz wiedzieć więcej o naszej ofercie?

Skontaktuj się z reprezentantem
wydawnictwa Nowa Era!



teraz 2015 matura

**Wyjątkowa oferta przygotowana
przez doświadczonych ekspertów.**

Z Nową Erą skutecznie i wszechstronnie
przygotujesz uczniów do nowego
egzaminu maturalnego z matematyki!

*Wszystko, czego potrzebują
Twi uczniowie, by zdać
nową maturę!*

Dostępne od 2015 r.



Dostępne od 2015 r.



VADEMECUM

PODSTAWA I ROZSZERZENIE

Systematyzuje wiadomości,
zapoznaje ze sposobami
rozwiązywania zadań typu
maturalnego.

ZBIÓR ZADAŃ I ZESTAWÓW MATURALNYCH

PODSTAWA I ROZSZERZENIE

Umożliwia poznanie zadań
typu maturalnego i ćwiczenie
umiejętności sprawdzanych
na maturze.

ARKUSZE MATURALNE

PODSTAWA I ROZSZERZENIE

Oswajają z formą egzaminu
maturalnego i sprawdzają
poziom przygotowania ucznia
do matury.

TUŻ PRZED EGZAMINEM

PODSTAWA

Utrwala najważniejsze
wiadomości i umiejętności
tuż przed egzaminem
maturalnym.

