

6. Wielomiany

Funkcję

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}$, nazywamy **wielomianem** stopnia n . Stopień wielomianu w oznaczamy $\text{st}(w)$. Liczby: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu, a współczynnik a_0 – **wyrazem wolnym**. Funkcję w stale równą zero nazywamy **wielomianem zerowym**.

Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu w , jeśli $w(a) = 0$.

Każdy wielomian można przedstawić w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

- Dane są wielomiany $w(x) = 2x^3 + 3x + 1$ i $u(x) = x^2 - 1$. Wyznacz wielomian f i podaj jego stopień.
 - $f(x) = 2x \cdot u(x) - w(x)$
 - $f(x) = u(x) \cdot w(x) - 2x^5$
- Wyznacz iloczyn, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.
 - $(\frac{x}{2} + 1)^2$
 - $(4x - \frac{5}{2})^2$
 - $(3x^2 - 1)^2$
 - $(5 + 2x^3)^2$
 - $(\sqrt{2}x + 3)(3 - \sqrt{2}x)$
 - $(\frac{\sqrt{6}}{2}x - 1)(\frac{\sqrt{6}}{2}x + 1)$
- Przedstaw w postaci sumy algebraicznej.
 - $(2x + 1)^3$
 - $(1 - \sqrt{2}x)^3$
 - $(x^2 - 3)^3$
- Wyznacz iloczyn, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.
 - $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$
 - $(3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$
 - $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$
 - $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$
- Oblicz sumę współczynników wielomianu w .
 - $w(x) = (4 - 5x)^3$
 - $w(x) = (\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2})^3$
- Wyznacz parametr a , jeśli $w(-1) = 5$.
 - $w(x) = 3 - 2x^2 + ax^3$
 - $w(x) = x(x - a)^2 + 6$
- Wyznacz współczynniki a i b wielomianu w , jeśli $w(-2) = -3$ i $w(1) = 15$.
 - $w(x) = x^4 + 6x^3 + ax^2 + 2x + b$
 - $w(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + 1$

8. Rozłóż wielomian w na czynniki.
a) $w(x) = x^2 + 6x + 9$
b) $w(x) = \frac{x^2}{4} + x + 1$
c) $w(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
d) $w(x) = 9 - 12x^2 + 4x^4$
9. Podaj czynniki liniowe występujące w rozkładzie wielomianu w .
a) $w(x) = x^4 - 81$
b) $w(x) = 8x^3 - 1$
c) $w(x) = x^3 + 125$
10. Rozłóż wielomian w na czynniki.
a) $w(x) = 12x^5 - 3x^3$
b) $w(x) = 2x^5 + 16x^2$
c) $w(x) = 3x^5 - 6x^4 - 6x^3$
d) $w(x) = 4x^4 + 8x^3 + 12x^2$
11. Rozłóż wielomian w na czynniki. Które spośród liczb: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ są pierwiastkami tego wielomianu?
a) $w(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
b) $w(x) = 4x^3 - x^2 - 8x + 2$
c) $w(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$
d) $w(x) = 4x^5 - x^3 - 4x^2 + 1$
12. Rozwiąż równanie.
a) $3x^4 - 6x^3 - 12x^2 = 0$
b) $10x^5 + 15x^3 = 5x^4$
c) $9x^5 = 6x^4 - x^3$
d) $4x^3 - 12x^2 + x - 3 = 0$
e) $2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0$
f) $x^3 + 2x^2 = 5x + 10$
13. Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu w . Oblicz a i wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
a) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + a - 2, x_0 = 3$
b) $w(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 - 6x, x_0 = -2$
14. Punkty: $A(2, a), B(-1, b)$ i $C(0, c)$ należą do wykresu wielomianu w . Oblicz a, b i c .
a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$
b) $w(x) = (x - 1)^5 + (1 - x)^4 + 6$
15. Oblicz k , jeśli punkt $P(k, 8)$ należy do wykresu wielomianu w .
a) $w(x) = x^3 - 19$
b) $w(x) = (x + 1)^3$
c) $w(x) = x^3 - x^2 - x + 9$
16. Rozłóż podany wielomian na czynniki, a następnie uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n jego wartość jest liczbą podzielną przez 6.
a) $n^3 - n$
b) $n^5 - n$
17. Krawędzie prostopadłościanu mają długości $2x, x, x - 3$ ($x > 3$). Wyznacz wartość x , dla której objętość tego prostopadłościanu jest równa objętości sześcianu o krawędzi x .

Zestaw B. Test jednokrotnego wyboru

- Wielomian $(2-x)(2+x)(4+x^2)$ jest równy wielomianowi:
A. $(4-x^2)^2 + 8x^2$,
B. $(4+x^2)^2 - 2x^4$,
C. $(4-x^2)^2 + 8x^2 + 2x^4$,
D. $(4+x^2)^2 - 8x^2 - 2x^4$.
- Wielomian $w(x) = x(x^2 + 2a) - x(x^2 - 1)$ przyjmuje wartość stałą równą 0 dla a równego:
A. -1,
B. $-\frac{1}{2}$,
C. 0,
D. 1.
- Pierwiastkiem całkowitym wielomianu $w(x) = x^4 - (x-2)^2$ jest liczba:
A. -2,
B. -1,
C. 0,
D. 2.
- Ile pierwiastków będących liczbami nieujemnymi ma równanie $\frac{1}{2}x^3 - 8x = 0$?
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
- Liczba pierwiastków wielomianu $w(x) = x^4 - 5x^2 - 14$ jest równa liczbie niewymiernych pierwiastków wielomianu $u(x) = x^3 - 3x$. Ile pierwiastków ma wielomian w ?
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
- Wspólnym pierwiastkiem wielomianu $u(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ i wielomianu $w(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ jest liczba:
A. $-\sqrt{2}$,
B. -3,
C. 3,
D. 6.
- Wielomian $w(x) = x^3 - ax$ ma trzy pierwiastki, z których dwa są liczbami niewymiernymi dla a równego:
A. 2,
B. $2\frac{7}{9}$,
C. 4,
D. $-\sqrt{2}$.
- Wielomiany $u(x) = (5a+3)x^3 - x$ i $w(x) = 2x^3 - b^2x$ są równe dla:
A. $a = -1$ i $b = 1$,
B. $a = 2$ i $b = 1$,
C. $a = \frac{1}{5}$ i $b = 1$,
D. $a = -\frac{1}{5}$ i $b = -1$.
- Wielomianem, który dla $x > \frac{3}{2}$ opisuje objętość sześcianu o krawędzi $2x - 3$, jest:
A. $w(x) = 8x^3 - 27$,
B. $w(x) = 8x^3 + 27$,
C. $w(x) = 8x^3 - 12x^2 + 18x - 27$,
D. $w(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$.
- Ile pierwiastków równania $x^3 = \frac{1}{2}x$ należy do przedziału $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$?
A. 3
B. 2
C. 1
D. 0

Zestaw C. Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1. (2 pkt)

Oblicz $f(-1)$, jeżeli $f(x) = w(x) - 2u(x)$ oraz $w(x) = x^2 + 4x$, $u(x) = x^3 + 2x$.

Zadanie 2. (2 pkt)

Dane są wielomiany $w(x) = x(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$ i $u(x) = x^3 - 2x$. Wyznacz wielomian $f(x) = w(x) - 3u(x)$ i podaj jego stopień.

Zadanie 3. (2 pkt)

Sprawdź, czy punkty $A(\sqrt{2}, 4)$ i $B(-\frac{1}{2}, 1)$ należą do wykresu wielomianu:

$$w(x) = \frac{x^3}{2} + 2x^2 - x.$$

Zadanie 4. (2 pkt)

Rozłóż na czynniki wielomian $w(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$.

Zadanie 5. (2 pkt) – Matura, maj 2010

Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

Zadanie 6. (2 pkt)

Uzasadnij, że wielomian $w(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$ ma pierwiastek niewymierny.

Zadanie 7. (2 pkt) – Informator CKE

Rozwiąż równanie $2x^3 - 18x = 0$.

Zadanie 8. (2 pkt)

Podaj nieujemne rozwiązania równania $x^3 - 2x^2 - x = 0$.

Zadanie 9. (2 pkt)

Oblicz k , jeśli punkt $P(k+1, -7)$ należy do wykresu wielomianu $w(x) = x^3 + 1$.

Zadanie 10. (2 pkt)

Oblicz wartość parametru a , dla której punkt $P(-1, 3)$ należy do wykresu wielomianu $w(x) = 5x^3 - (a-2)x^2 + 7$.

Zadanie 11. (2 pkt)

Dla jakich wartości parametru a suma współczynników wielomianu:

$$w(x) = x^3 + (2x-1)^2 + a$$

jest liczbą dodatnią?

Zadanie 12. (2 pkt)

Oblicz wartość parametru a , dla której liczba -3 jest miejscem zerowym wielomianu $w(x) = (2a+3)x^3 - 7x + 5 - a$.

Zestaw D. Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 1. (3 pkt)

Oblicz m , jeśli liczba $\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx - 3$.

Zadanie 2. (3 pkt)

Liczby -1 i 1 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + a$.

Oblicz a i b .

Zadanie 3. (4 pkt)

Rozłóż na czynniki wielomian $w(n) = n^4 - 2n^3 + n^2$, a następnie uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 4.

Zadanie 4. (6 pkt) – Matura próbna, styczeń 2009

Rozwiąż nierówność $(x-2)^2 - 4 < 0$. Podaj rozwiązania równania $x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0$ należące do zbioru rozwiązań tej nierówności.

Zadanie 5. (4 pkt) – Matura, maj 2008

Dany jest wielomian $w(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$.

a) Sprawdź, czy punkt $A(1, 30)$ należy do wykresu wielomianu w .

b) Zapisz wielomian w w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

Zadanie 6. (4 pkt)

Dane są przedziały $(-\infty; 18m + 9)$ i $(2m^3 + m^2; \infty)$, gdzie $m \in \mathbf{R}$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których część wspólna tych przedziałów jest zbiorem jednoelementowym.

Zadanie 7. (5 pkt)

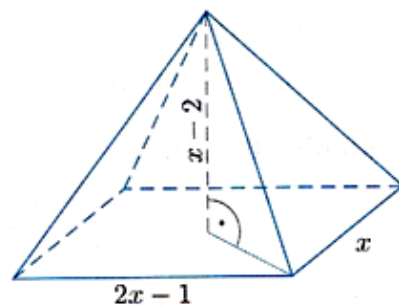
Na rysunku przedstawiono ostrosłup o podstawie prostokątnej.

a) Wykaż, że funkcja opisująca objętość tego ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 5x^2 + 2x) \text{ dla } x > 2$$

b) Oblicz objętość tego ostrosłupa dla $x = 3$.

c) Dla jakiej wartości x objętość ostrosłupa jest równa $\frac{5}{3}$?



Zadanie 8. (5 pkt) – Matura, maj 2009

Wielomian w dany jest wzorem $w(x) = x^3 + ax^2 - 4x + b$.

a) Wyznacz współczynniki a , b i c , tak aby wielomian w był równy wielomianowi $p(x) = x^3 + (2a + 3)x^2 + (a + b + c)x - 1$.

b) Dla $a = 3$ i $b = 0$ zapisz wielomian w w postaci iloczynu trzech wielomianów pierwszego stopnia.