

Zadanie 5.46

Dwa ciała wyrzucono z takimi samymi szybkościami początkowymi, pod dwoma różnymi kątami, ale takimi, że zasięgi rzutów są jednakowe. Załóż, że drugie ciało wyrzucono pod większym kątem α_2 . Wyprowadź wzór na:

a) Stosunek czasów ruchu tych ciał (t_2/t_1)

Dane:

Prędkości początkowe ciał: $v_1 = v_2 = v_0$

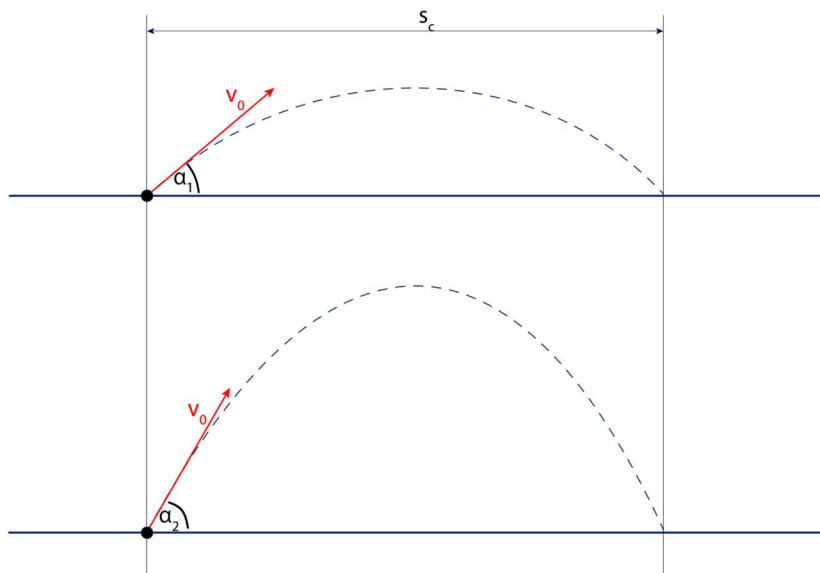
Kąt wyrzucenia pierwszego ciała = α_1

Kąt wyrzucenia drugiego ciała = α_2

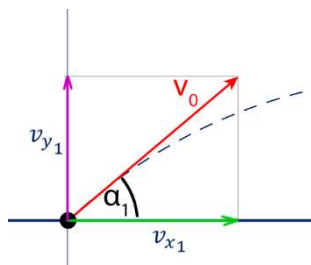
!!! $\alpha_2 > \alpha_1$

Zasięgi rzutów dla obu ciał $s_1 = s_2 = s_c$

Rozwiązanie:



Zacznijmy od rozbicia prędkości początkowej pierwszego ciała na składowe:



Łatwo zauważyć z zależności trygonometrycznych, że:

$$\frac{v_{y1}}{v_0} = \sin \alpha_1$$

W związku z tym pionowa składowa prędkości:

$$v_{y1} = v_0 \cdot \sin \alpha_1$$

W podobny sposób wyznaczam pionową składową prędkości dla drugiego ciała, zmienia się przecież tylko kąt:

$$v_{y2} = v_0 \cdot \sin \alpha_2$$

W analogiczny sposób wyznaczą poziome składowe prędkości dla obu ciał:

$$\frac{v_{x1}}{v_0} = \cos \alpha_1$$

$$v_{x1} = v_0 \cdot \cos \alpha_1$$

I dla drugiego ciała...

$$v_{x2} = v_0 \cdot \cos \alpha_2$$

a)

Musimy wyznaczyć czasy ruchów tych ciał. Dla obu ciał czas ruchu to czas od oderwania się od ziemi do ponownego w nią uderzenia. Znaczenie ma tu tylko ruch do góry i w dół, to ile ciało w tym czasie przeleci nie ma znaczenia. Do góry ruch jest jednostajnie opóźniony, natomiast w dół jednostajnie przyspieszony. Czasy wznoszenia się i opadania są jednakowe.

Wyznaczenie czasu wznoszenia pierwszego ciała:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$g = \frac{v_{y1}}{t_{w1}}$$

$$t_{w1} = \frac{v_{y1}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha_1}{g}$$

Całkowity czas ruchu pierwszego ciała to suma czasu wznoszenia i czasu opadania, które są sobie równe.

$$t_1 = t_{w1} + t_{o1} = 2 \cdot t_{w1} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_1}{g}$$

Dla drugiego ciała należy przeprowadzić analogiczne rozumowanie i czas jego ruchu powinien wyjść jako:

$$t_2 = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_2}{g}$$

Wiemy, że zasięgi obu rzutów są równe. Zasięg rzutu to odłość, jaką ciało przebędzie ruchem jednostajnym od momentu oderwania się od ziemi do momentu upadku.

$$s = v \cdot t$$

Dla pierwszego ciała:

$$s_c = v_{x1} \cdot t_1$$

$$s_c = v_0 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_1}{g} = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{g}$$

Analogicznie dla drugiego ciała:

$$s_c = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{g}$$

Przyrównajmy do siebie zasięgi rzutów $s_c = s_c$:

$$\frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{g} = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{g}$$

Znając wzory trygonometryczne:

Funkcje podwojonego kąta:

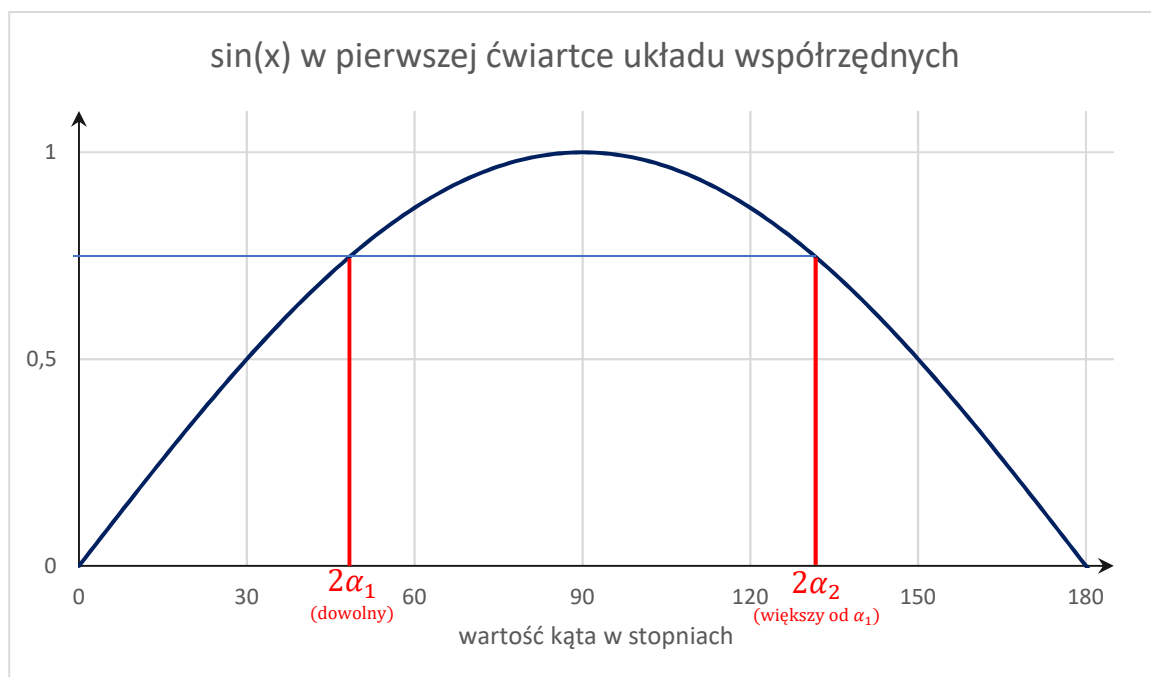
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{g} = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_2}{g}$$
$$\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha_2}{g}$$

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$$

Oczywistym rozwiązaniem takiego równania wydaje się być $\alpha_1 = \alpha_2$, ale nie możemy tak zrobić, bo z treści zadania wiemy, że $\alpha_2 > \alpha_1$!!!

Aby poznać inne rozwiązanie trzeba się przyjrzeć początkowi funkcji sinus:



Spójrz, zazaczyłem na wykresie taki kąt $2\alpha_1$, oraz $2\alpha_2$, że spełniony jest warunek $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$. Zauważ, że wartość $2\alpha_2$ to okres funkcji sinus - 180° pomniejszony o wartość $2\alpha_1$

$$2\alpha_2 = 180 - 2\alpha_1$$

Podzielę stronami przez 2:

$$\alpha_2 = 90 - \alpha_1$$

Gdybym wolał jednak wzór na α_1 to wystarczy przekształcenie:

$$\alpha_1 = 90 - \alpha_2$$

Zapiszmy szukany stosunek czasów ruchu:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_2}{g}}{\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_1}{g}} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_2}{g} \cdot \frac{g}{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin(90 - \alpha_2)}$$

Z wzorów redukcyjnych:

$$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \operatorname{tg} \alpha_2$$